Droites du plan – Seconde

Version élève

Repères du programme (BO – Seconde générale).

— déterminer un vecteur directeur d'une droite ;

— utiliser et reconnaître une équation cartésienne ou réduite de droite ;

— tracer une droite à partir d'une équation ;

— déterminer la position relative de deux droites ;

— calculer une pente ;

— reconnaître et utiliser le projeté orthogonal d'un point sur une droite.

Cours complet en vidéo

Partie 1 : Vecteur directeur et équation cartésienne d'une droite

Vecteur directeur

Exemple. Si une droite « avance de 1 » quand elle « monte de 2 », alors

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

est un vecteur directeur de cette droite.
Les vecteurs

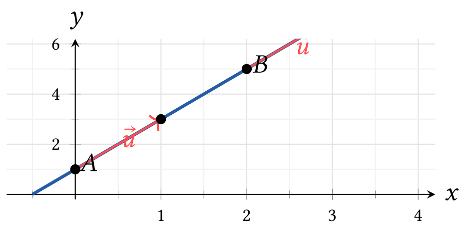
$$\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

conviennent aussi, car ils ont la même direction.

Définition / propriété. On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout vecteur non nul ayant la même direction que cette droite.
Une droite possède donc une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.

Exercice. Donner deux vecteurs directeurs de la droite passant par les points $A(0;1)$ et $B(2;5)$.

Réponse



Des vecteurs de même direction que la droite sont des vecteurs directeurs

Équation cartésienne d'une droite

Exemple. La droite d'équation

$$4x - 5y - 1 = 0$$

admet pour vecteur directeur

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

car ici $a = 4$ et $b = -5$, donc

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Définition / propriété. Toute droite admet une équation de la forme

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{avec} \qquad (a; b) \neq (0; 0).$$

Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite.
Si une droite a pour équation cartésienne

$$ax + by + c = 0,$$

alors

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

est un vecteur directeur de cette droite.
Exercice. Déterminer un vecteur directeur de la droite d'équation

$$7x + 3y - 2 = 0.$$

Réponse

Démonstration
Soit d une droite passant par un point $A(x_0; y_0)$ et ayant pour vecteur directeur

$$\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Un point $M(x; y)$ appartient à d si et seulement si les vecteurs

$$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

sont colinéaires.
Cela revient à écrire que leur déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient :

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0.$$

En développant :

$$\beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0.$$

C'est bien une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

avec

$$a = \beta, \qquad b = -\alpha, \qquad c = \alpha y_0 - \beta x_0.$$

Donc un vecteur directeur de la droite est

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Si une droite a pour équation

$$ax + by + c = 0,$$

alors un vecteur directeur est

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}.$$

Déterminer une équation cartésienne à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Exemple. Soit d la droite passant par $A(3; 1)$ et de vecteur directeur

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Comme

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

on peut prendre $a = 5$ et $b = 1$.
Une équation de d est donc de la forme

$$5x + y + c = 0.$$

Comme $A(3; 1)$ appartient à d :

$$5 \times 3 + 1 + c = 0$$

donc

$$16 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -16.$$

Une équation cartésienne de d est donc

$$5x + y - 16 = 0.$$

Définition / propriété. Pour déterminer une équation cartésienne d'une droite à partir d'un point $A(x_A; y_A)$ et d'un vecteur directeur

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

on cherche une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

avec

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on utilise le point connu pour calculer c.
Exercice. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $B(2; -1)$ et de vecteur directeur

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Réponse

Déterminer une équation cartésienne à partir de deux points

Exemple. Soient $B(5;3)$ et $C(1;-3)$.
Le vecteur

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

est un vecteur directeur de la droite.
Compléter alors en classe :

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad a = \cdots \quad \text{et} \quad b = \cdots$$

puis chercher une équation de la forme

$$\cdots x + \cdots y + c = 0.$$

Définition / propriété. Si l'on connaît deux points A et B d'une droite, alors

$$\overrightarrow{AB}$$

est un vecteur directeur de cette droite.
On utilise ensuite la méthode précédente.

Exercice. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $D(-1;2)$ et $E(3;0)$.

Réponse

Tracer une droite à partir de son équation cartésienne

Exemple. Tracer la droite d'équation

$$3x + 2y - 5 = 0.$$

On choisit d'abord un point de la droite. Si $x = 0$, alors

$$3 \times 0 + 2y - 5 = 0$$

donc

$$2y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{5}{2}.$$

Le point

$$A\left(0; \frac{5}{2}\right)$$

appartient à la droite.
De plus, comme $a = 3$ et $b = 2$, un vecteur directeur est

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On trace alors la droite passant par $A\left(0; \frac{5}{2}\right)$ et dirigée par

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Définition / propriété. Pour tracer une droite à partir de son équation cartésienne, il suffit de connaître :

— un point de la droite ;

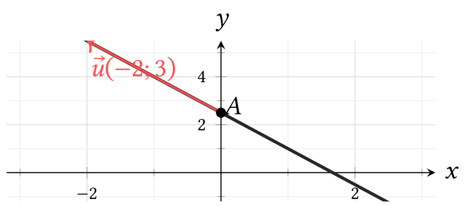
— un vecteur directeur.

On peut obtenir un point en donnant une valeur à x ou à y, puis en calculant l'autre coordonnée.

Exercice. Tracer la droite d'équation

$$2x - y + 1 = 0.$$

Réponse



Tracé d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Position relative de deux droites

Exemple. Considérons les droites

$$d_1 : 6x - 10y - 5 = 0 \qquad \text{et} \qquad d_2 : -9x + 15y = 0.$$

Un vecteur directeur de d_1 est

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

et un vecteur directeur de d_2 est

$$\begin{pmatrix} -15 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Calculons le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 10 & -15 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 10 \times (-9) - 6 \times (-15) = 0.$$

Les vecteurs sont colinéaires, donc les droites sont parallèles.
Définition / propriété. Deux droites sont **parallèles** si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.
Exercice. Montrer que les droites

$$2x - y + 3 = 0 \qquad \text{et} \qquad -4x + 2y - 7 = 0$$

sont parallèles.

Réponse

Partie 2 : Équation réduite et pente d'une droite

Équation réduite
Exemple. Soit la droite d'équation cartésienne

$$4x + y - 6 = 0.$$

On obtient :

$$4x + y = 6 \qquad \Rightarrow \qquad y = -4x + 6.$$

Cette écriture est appelée **équation réduite** de la droite.
Définition / propriété. Soit une droite *d*.
— Si *d* est parallèle à l'axe des ordonnées, alors son équation est de la forme

$$x = n.$$

— Si *d* n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors son équation est de la forme

$$y = mx + p.$$

Cette équation est appelée **équation réduite** de la droite.
Exercice. Parmi les équations suivantes, lesquelles sont des équations réduites ?

$$y = 3x - 2, \qquad x = 4, \qquad 2x - y + 1 = 0.$$

Réponse

Démonstration
Soit une droite d'équation cartésienne
$$ax + by + c = 0.$$
Cas 1 : $b \neq 0$.
On peut isoler y :
$$by = -ax - c$$
puis
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$
La droite a donc une équation de la forme
$$y = mx + p$$
avec
$$m = -\frac{a}{b} \qquad \text{et} \qquad p = -\frac{c}{b}.$$
Cas 2 : $b = 0$.
L'équation devient
$$ax + c = 0.$$
Comme $(a; b) \neq (0; 0)$, on a alors $a \neq 0$, donc
$$x = -\frac{c}{a}.$$
La droite est donc parallèle à l'axe des ordonnées.

Passer d'une équation cartésienne à une équation réduite, et réciproquement

Exemple. a) Pour
$$6x + 3y - 5 = 0,$$
on isole y :
$$3y = -6x + 5$$
puis
$$y = -2x + \frac{5}{3}.$$
b) Pour
$$y = 6x - 5,$$
on regroupe tous les termes dans le membre de gauche :
$$-6x + y + 5 = 0.$$
Définition / propriété. Pour passer d'une équation cartésienne à une équation réduite, on **isole** y.
Pour passer d'une équation réduite à une équation cartésienne, on **ramène tous les termes dans le membre de gauche**.
Exercice. Transformer
$$4x - 2y + 7 = 0$$
en équation réduite, puis transformer
$$y = -3x + 8$$
en équation cartésienne.

Réponse

Pente et ordonnée à l'origine

Exemple. Pour la droite d'équation

$$y = -2x + 3,$$

la pente est -2 et l'ordonnée à l'origine est 3.
Pour la droite d'équation

$$y = 5,$$

la pente est 0 et l'ordonnée à l'origine est 5.
Pour

$$4x + 2y = 1,$$

on peut compléter en classe :

$$2y = \cdots \qquad \text{puis} \qquad y = \cdots$$

avant de lire la pente et l'ordonnée à l'origine.

Définition / propriété. Dans une équation réduite

$$y = mx + p,$$

- m est la **pente** ou le **coefficient directeur** ;
- p est l'**ordonnée à l'origine**.

Exercice. Donner la pente et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites :

$$y = 4x - 1, \qquad y = -3, \qquad 5x - y + 2 = 0.$$

Réponse

Représenter graphiquement une droite d'équation réduite

Exemple. Tracer les droites :

$$d_1 \ : \ y = 2x + 3, \qquad d_2 \ : \ y = 4, \qquad d_3 \ : \ x = 3.$$

Pour d_1 : Le point $(0;3)$ appartient à d_1. Si $x = 2$, alors

$$y = 2 \times 2 + 3 = 7.$$

Le point $(2;7)$ appartient donc aussi à d_1.
Pour d_2 : La droite $y = 4$ est horizontale.
Pour d_3 : La droite $x = 3$ est verticale.

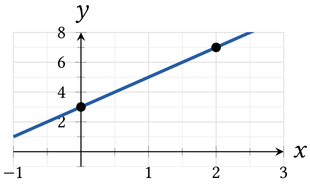
Définition / propriété. Pour tracer une droite d'équation réduite :

- si elle est de la forme
  $$y = mx + p,$$
  on peut placer deux points ;
- si elle est de la forme
  $$y = k,$$
  c'est une droite horizontale ;
- si elle est de la forme
  $$x = k,$$
  c'est une droite verticale.

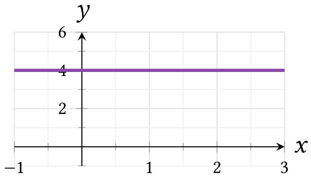
Exercice. Tracer dans un repère les droites

$$y = -x + 2, \qquad y = 1, \qquad x = -2.$$

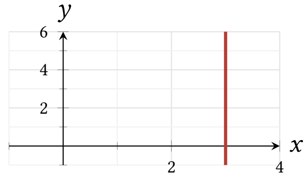
Réponse



$y = 2x + 3$



$y = 4$



$x = 3$

Vérifier qu'un point appartient à une droite

Exemple. Les points

$$A(6; 39) \qquad \text{et} \qquad B(346; 2420)$$

appartiennent-ils à la droite

$$d \ : \ \ y = 7x - 3 \ ?$$

Pour A, on calcule :

$$7 \times 6 - 3 = 42 - 3 = 39.$$

Les coordonnées de A vérifient bien l'équation : A appartient à d.
Pour B, on calcule :

$$7 \times 346 - 3 = 2422 - 3 = 2419.$$

Or $2419 \neq 2420$, donc B n'appartient pas à d.
Définition / propriété. Un point $M(x_M; y_M)$ appartient à une droite si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.
Exercice. Le point $C(-2; 5)$ appartient-il à la droite

$$y = -3x - 1 \ ?$$

Réponse

Pente d'une droite connaissant deux points

Exemple. Soient

$$A(4;-1) \qquad \text{et} \qquad B(3;5).$$

La pente de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-(-1)}{3-4} = \frac{6}{-1} = -6.$$

L'équation réduite est donc de la forme

$$y = -6x + p.$$

Comme $A(4;-1)$ appartient à la droite :

$$-1 = -6 \times 4 + p,$$

donc

$$-1 = -24 + p \qquad \Rightarrow \qquad p = 23.$$

Ainsi, une équation de la droite est

$$y = -6x + 23.$$

Définition / propriété. Si

$$A(x_A; y_A) \quad \text{et} \quad B(x_B; y_B)$$

sont deux points distincts d'une droite avec

$$x_A \neq x_B,$$

alors la pente de cette droite est

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exercice. Déterminer une équation réduite de la droite passant par

$$C(1;4) \quad \text{et} \quad D(3;0).$$

Réponse

Position relative de deux droites à partir des pentes

Exemple. Les droites

$$d_1 \ : \ \ y = 3x + 4 \qquad \text{et} \qquad d_2 \ : \ \ y = 3x + 9$$

ont la même pente :

$$m_1 = 3 \qquad \text{et} \qquad m_2 = 3.$$

Elles sont donc parallèles.

Définition / propriété. Soient deux droites d'équations réduites

$$y = mx + p \qquad \text{et} \qquad y = m'x + p'.$$

Dire qu'elles sont parallèles revient à dire que

$$m = m'.$$

Lorsque les pentes sont différentes, les droites sont sécantes.

Exercice. Dans chaque cas, préciser si les droites sont parallèles ou sécantes :

$$y = -2x - 5 \quad \text{et} \quad y = -2x + 4,$$

$$y = 2x + 1 \quad \text{et} \quad y = -3x + 8.$$

Réponse

Partie 3 : Projeté orthogonal d'un point sur une droite

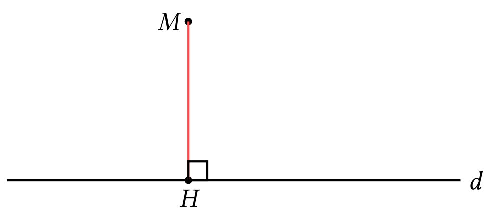
Projeté orthogonal

Exemple. Soit une droite d et un point M n'appartenant pas à d.
On appelle H le point d'intersection de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M.
Le point H est le projeté orthogonal de M sur d.

Définition / propriété. Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection de d avec la perpendiculaire à d passant par M.

Exercice. Sur une figure, construire le projeté orthogonal d'un point P sur une droite d.

Réponse



Le projeté orthogonal de M sur d est le point H

Le projeté orthogonal est le point le plus proche

Exemple. Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite d.
Si K est un autre point de la droite d, alors le triangle MHK est rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore :

$$MK^2 = MH^2 + HK^2.$$

Comme

$$HK^2 \geq 0,$$

on obtient

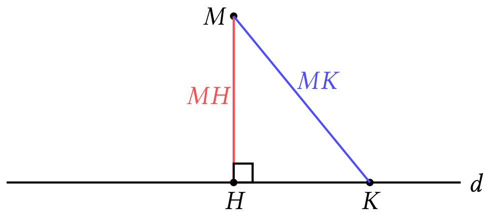
$$MK^2 \geq MH^2,$$

puis

$$MK \geq MH.$$

Donc le point H est bien le point de la droite d le plus proche de M.
Définition / propriété. Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le **point de la droite le plus proche** de M.
Exercice. Expliquer pourquoi, parmi tous les points d'une droite, le projeté orthogonal est celui qui minimise la distance à un point donné.

Réponse



On a toujours $MH \leq MK$

Reconnaître un projeté orthogonal sur une figure
Exemple. Pour reconnaître un projeté orthogonal, on repère :
— un point situé sur la droite ;
— un angle droit entre la droite et le segment joignant ce point au point extérieur.
Définition / propriété. Un point H est le projeté orthogonal de M sur une droite d si :
— H appartient à d ;
— la droite (MH) est perpendiculaire à d.
Exercice. Sur la figure ci-dessous :
1. donner le projeté orthogonal de C sur (AB) ;
2. donner le projeté orthogonal de B sur (DF) ;
3. donner le projeté orthogonal de D sur (AC) ;
4. donner le projeté orthogonal de F sur (AD).

Réponse

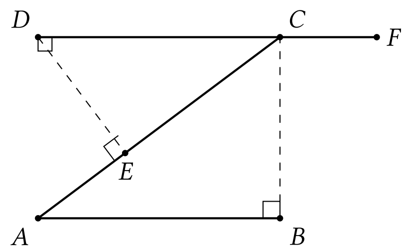


Figure pour reconnaître des projetés orthogonaux

Démonstration : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Exemple. Soit un triangle rectangle PHM rectangle en H, et soit

$$\alpha = \widehat{MPH}.$$

Par définition du cosinus et du sinus :

$$\cos\alpha = \frac{PH}{PM} \qquad \text{et} \qquad \sin\alpha = \frac{HM}{PM}.$$

Donc

$$PH = PM\cos\alpha \qquad \text{et} \qquad HM = PM\sin\alpha.$$

D'après le théorème de Pythagore :

$$PH^2 + HM^2 = PM^2.$$

En remplaçant :

$$(PM\cos\alpha)^2 + (PM\sin\alpha)^2 = PM^2.$$

On factorise par PM^2 :

$$PM^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = PM^2.$$

Comme $PM \neq 0$, on peut simplifier par PM^2, d'où :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

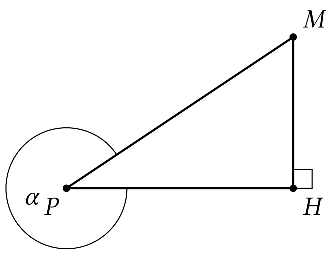
Définition / propriété. Dans un triangle rectangle, les définitions du cosinus et du sinus, combinées au théorème de Pythagore, permettent d'établir l'identité :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Exercice. Dans un triangle rectangle, démontrer que

$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1.$$

Réponse



Triangle rectangle utilisé pour établir $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Tableau récapitulatif

Notion	Écriture	Condition / lecture	À retenir
Vecteur directeur	$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$	même direction que la droite	vecteur non nul
Équation cartésienne	$ax + by + c = 0$	$(a;b) \neq (0;0)$	directeur : $\begin{pmatrix}-b\\ a\end{pmatrix}$
Équation réduite	$y = mx + p$	droite non verticale	m pente, p ordonnée à l'origine
Droite verticale	$x = n$	parallèle à l'axe des ordonnées	pas d'écriture $y = mx + p$
Pente avec deux points	$\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	$x_A \neq x_B$	coefficient directeur
Projeté orthogonal	–	perpendiculaire à la droite	point le plus proche

Bilan

Notion	Expression	À retenir
Vecteur directeur	$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$	même direction que la droite
Équation cartésienne	$ax + by + c = 0$	directeur : $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$
Équation réduite	$y = mx + p$	m pente, p ordonnée à l'origine
Droite verticale	$x = n$	parallèle à l'axe des ordonnées
Pente	$\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	si $x_A \neq x_B$
Projeté orthogonal	–	point le plus proche sur la droite
Trigonométrie	$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$	identité fondamentale