Planche 2 – Fonctions de référence et approfondissement

Seconde • Chapitre 14 • 25 exercices

Cliquer sur [Correction] pour accéder directement au corrigé.

I Fonctions de référence

Exercice 1 — Variations — rappel [Correction]

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser le domaine de définition et les intervalles de croissance et de décroissance.

a) $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$

b) $g(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$

c) $h(x) = \sqrt{x}$

d) $k(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

e) $m(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;\,0[$

Exercice 2 — Comparer sans calculatrice [Correction]

Comparer les expressions suivantes en utilisant les variations des fonctions de référence.

a) $(-3)^2$ et 4^2

b) $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$

c) $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{5}$ (pour $x > 0$)

d) $(-2)^3$ et 3^3

e) $(-4)^2$ et $(-7)^2$

f) $\sqrt{0{,}16}$ et $\sqrt{0{,}49}$

Exercice 3 — Résoudre par les variations [Correction]

Résoudre en s'appuyant sur les variations des fonctions de référence.

a) $x^2 \leq 16$ sur $\mathbb{R}$

b) $x^3 > -27$ sur $\mathbb{R}$

c) $\sqrt{x} < 4$ sur $[0\,;\,+\infty[$

d) $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{6}$ sur $]0\,;\,+\infty[$

Exercice 4 — Extremums de x^2 sur un intervalle [Correction]

Déterminer le maximum et le minimum de $f(x) = x^2$ sur chaque intervalle, en dressant le tableau de variations.

a) Sur $[-4\,;\,1]$

b) Sur $[2\,;\,6]$

c) Sur $[-3\,;\,5]$

Exercice 5 — Encadrer sans calculer [Correction]

Sans calculatrice, encadrer les expressions suivantes entre deux entiers.

a) $\sqrt{50}$

b) $\sqrt[3]{10}$ (x^3 croissante : $2^3 = 8$ et $3^3 = 27$)

c) $\dfrac{1}{1{,}5}$ en utilisant $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{1}$

d) $(-2{,}5)^2$

II Démonstrations

Exercice 6 — Variations de la fonction carrée [Correction]

But : démontrer les variations de $f(x) = x^2$.

1) Soient a et b deux réels positifs avec $a < b$. Recopier et compléter :
   - $a < b$ donc a^2 … ab
   - $a < b$ donc ab … b^2
   - soit : a^2 … b^2

   Conclure : f est … sur $[0\,;\,+\infty[$.

2) Démontrer de même que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ en prenant $a < b \leq 0$.

3) Établir le tableau de variations de f.

Exercice 7 — Variations de la fonction inverse [Correction]

But : démontrer les variations de $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

1) Soient a, b strictement positifs avec $a < b$.
   a) Montrer que $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b-a}{ab}$.
   b) Quel est le signe de $b - a$?
   c) Quel est le signe de ab ?
   d) Conclure : g est … sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Soient $a < b < 0$. Démontrer de même que g est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Exercice 8 — Logique — raisonnement [Correction]

Soit $f(x) = x^3 - 4x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Émilie affirme que f est croissante sur $[-3\,;\,-1]$. Que penser de cette affirmation ?

2) Jean calcule $f(0) = 1$ et $f(3) = 16$ et conclut que f est croissante sur $[0\,;\,3]$. Est-ce correct ?

3) Renée affirme que 4 est un maximum de f sur $\mathbb{R}$. Argumenter.

Exercice 9 — Calcul formel — maximum [Correction]

Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 2$. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient : $-x^2 + 4x + 2 = -(x-2)^2 + 6$.

1) Conjecturer la valeur du maximum de f sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $f(x) - 6$.

3) Justifier algébriquement que 6 est bien le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 — Tableau de variations — fonction rationnelle [Correction]

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$.

1) Conjecturer les variations de f à la calculatrice.

2) Pour $a < b$, montrer que $a^2 < b^2$ (si $0 \leq a < b$), puis que $a^2 + 4 < b^2 + 4$.

3) En déduire que $\dfrac{1}{a^2+4} > \dfrac{1}{b^2+4}$: f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

4) Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}^-$.

III Problèmes et applications

Exercice 11 — Aire d'un disque [Correction]

L'aire d'un disque de rayon r est $A(r) = \pi r^2$ $(r > 0)$.

1) Montrer que A est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2) Comparer $A(3)$ et $A(5)$ sans calculer.

3) Pour quelles valeurs de r a-t-on $A(r) \leq 25\pi$?

4) Encadrer $A(\sqrt{7})$ entre deux multiples entiers de π.

Exercice 12 — Chute libre [Correction]

$h(t) = 125 - 5t^2$ (hauteur en m, $t \in [0\,;5]$, t en secondes).

1) Calculer $h(0)$, $h(3)$ et $h(5)$.

2) Montrer que h est décroissante sur $[0\,;5]$.

3) Dresser le tableau de variations de h.

4) À quelle hauteur se trouve l'objet après 2 secondes ?

5) En quelle seconde touche-t-il le sol ?

Exercice 13 — Distance de freinage [Correction]

$d(v) = \dfrac{v^2}{100}$ (distance de freinage en m, v en km/h, $v \geq 0$).

1) Calculer $d(50)$, $d(80)$, $d(130)$.

2) Montrer que d est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

3) Pour quelle vitesse maximale $d(v) < 50$ m ?

Exercice 14 — Périmètre et aire d'un carré [Correction]

Soit un carré de côté $x > 0$: $P(x) = 4x$ et $A(x) = x^2$.

1) Identifier la nature de P et A (linéaire, affine, carré...).

2) P et A sont-elles croissantes ou décroissantes sur $]0\,;+\infty[$?

3) Si on double le côté : que devient le périmètre ? l'aire ?

4) Pour quelle valeur de x a-t-on $A(x) = 50$? Encadrer $\sqrt{50}$.

Exercice 15 — Fonction rationnelle [Correction]

Soit $f(x) = \dfrac{3x-5}{-x+2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

1) Conjecturer les variations de f sur $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

2) Vérifier que $f(x) = -3 + \dfrac{1}{-x+2}$.

3) La fonction $x \mapsto -x+2$ est-elle croissante ou décroissante ?

4) En déduire le sens de variation de f sur chaque intervalle.

IV Synthèse et approfondissement

Exercice 16 — Vrai ou faux ? — fonctions de référence [Correc

Vrai ou faux ? Justifier.

a) $f(x) = x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) $\sqrt{x}$ est définie pour tout réel x.

c) Pour $a < b < 0$, on a $a^2 > b^2$.

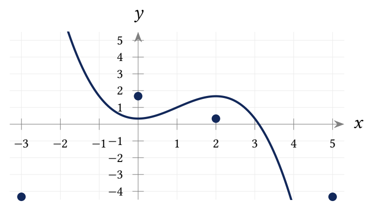
d) x^3 croissante implique que $(-2)^3 > 1^3$.

e) Pour tout $x > 0$, si f est décroissante et $0 < a < b$, alors $f(a) > f(b)$.

f) $\sqrt{x}$ admet un minimum absolu en $x = 0$.

Exercice 17 — Courbe — tableau — extremums [Correction]

On donne la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



1) Dresser le tableau de variations de f sur $[-3\,;5]$.

2) La fonction admet-elle un maximum absolu ? un minimum absolu ?

3) Identifier les extremums relatifs.

Exercice 18 — Tableau lacunaire avancé [Correction]

f définie sur $[-5\,;\,8]$ avec les informations suivantes :

— $f(0) = 1$, $f(3) = 4$, $f(-5) = -2$, $f(8) = 0$
— Max. absolu en $x = 3$, min. absolu en $x = -5$
— f croissante sur $[-5\,;\,0]$ puis décroissante sur $[0\,;\,3]$
— non : croissante sur $[-5\,;\,3]$, décroissante sur $[3\,;\,8]$

Dresser le tableau de variations complet de f.

Exercice 19 — Encadrement avancé [Correction]

Soit f décroissante sur $[0\,;\,5]$ et croissante sur $[5\,;\,12]$ avec $f(0) = 10$, $f(5) = 2$, $f(12) = 9$.

a) Encadrer $f(2)$, $f(4)$, $f(7)$, $f(10)$.

b) f admet-elle un minimum absolu ? un maximum absolu ?

c) Comparer $f(3)$ et $f(8)$.

Exercice 20 — Problème — trapèze [Correction]

Un trapèze rectangle $ABCD$ a $AB = 4$ cm et $BC = 3$ cm. On place M sur $[AD]$ avec $AM = x$ $(0 < x < 4)$.

1) Exprimer l'aire du triangle ABM en fonction de x.

2) Cette aire est-elle croissante ou décroissante en x ?

3) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle ABM est-elle maximale ?

Exercice 21 — Problème — rectangle [Correction]

On considère un rectangle de périmètre 20 cm. On note x la longueur $(0 < x < 10)$.

1) Exprimer la largeur en fonction de x.

2) Exprimer l'aire $A(x)$ en fonction de x.

3) Dresser le tableau de variations de A sur $]0\,;\,10[$ (maximum en $x = 5$).

4) Quel rectangle de périmètre 20 cm a l'aire maximale ?

Exercice 22 — Fonction $\dfrac{3x^2+4}{x^2+1}$ [Correction]

Soit $f(x) = \dfrac{3x^2+4}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Conjecturer le maximum et le minimum de f sur $\mathbb{R}$ à la calculatrice.

2) Vérifier que $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

3) Montrer que f est décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

4) En déduire le maximum absolu de f et sa valeur.

Exercice 23 — Croissance et composition [Correction]

Soient f croissante sur $[a\,;\,b]$ et g décroissante sur $[f(a)\,;\,f(b)]$.

1) Que peut-on dire de $g \circ f$ sur $[a\,;\,b]$?

2) Application : $f(x) = x^2$ sur $[0\,;\,+\infty[$ et $g(t) = \dfrac{1}{t}$ sur $]0\,;\,+\infty[$. Quelle est la variation de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;\,+\infty[$?

Exercice 24 — Synthèse — construire et analyser [Correction]

Construire un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui :

— n'a pas de maximum absolu ;
— n'a pas de minimum absolu ;
— admet exactement deux extremums relatifs ;
— coupe l'axe des abscisses en exactement trois points.

Dresser son tableau de variations et tracer une courbe possible.

Exercice 25 — Problème — bénéfice optimal [Correction]

Une entreprise fabrique n objets $(0 \leq n \leq 300)$. Le coût de production est $C(n) = 2n + 500$ et le prix de vente unitaire est $p(n) = 20 - \dfrac{n}{20}$.

1) Exprimer le chiffre d'affaires $R(n) = n \cdot p(n)$.

2) Exprimer le bénéfice $B(n) = R(n) - C(n)$.

3) Calculer $B(0)$, $B(100)$, $B(180)$, $B(300)$.

4) À l'aide de la calculatrice, trouver le nombre d'objets qui maximise le bénéfice.

5) Dresser le tableau de variations de B sur $[0\,;\,300]$.

Méthode — Dresser un tableau de variations

Un tableau de variations comporte deux lignes.

— Aux **extrémités** de la 1re ligne : les **bornes** du domaine de définition. Entre les bornes, on place d'éventuelles valeurs particulières.
— Le **sens de variation** est indiqué par des **flèches** : ↗ pour croissante et ↘ pour décroissante.
— Les valeurs où la fonction **n'est pas définie** sont signalées par une **double barre verticale**.
— On indique **au bout des flèches** les images des valeurs de la 1re ligne.

Corrigé — Planche 2

Seconde • Chapitre 14 • 25 exercices

Correction 1 — Variations — rappel [Énoncé]

a) x^2 : déc. sur $]-\infty ; 0]$, crois. sur $[0 ; +\infty[$. Min. $= 0$ en $x = 0$.
b) x^3 : croissante sur $\mathbb{R}$. Pas d'extremum.
c) $\sqrt{x}$: définie sur $[0 ; +\infty[$, croissante. Min. $= 0$ en $x = 0$.
d) $\frac{1}{x}$ sur $]0 ; +\infty[$: décroissante. Pas d'extremum.
e) $\frac{1}{x}$ sur $]-\infty ; 0[$: décroissante. Pas d'extremum.

Correction 2 — Comparer sans calculatrice [Énoncé]

a) $|-3| = 3 < 4$, x^2 crois. : $9 < 16$.
b) $5 < 7$, $\sqrt{x}$ crois. : $\sqrt{5} < \sqrt{7}$.
c) $3 < 5$, $1/x$ déc. : $\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$.
d) $-2 < 3$, x^3 crois. : $-8 < 27$.
e) $|-4| = 4 < 7 = |-7|$, x^2 crois. : $16 < 49$.
f) $0{,}16 < 0{,}49$, $\sqrt{x}$ crois. : $0{,}4 < 0{,}7$.

Correction 3 — Résoudre par les variations [Énoncé]

a) $x^2 \leq 16 : |x| \leq 4$, soit $x \in [-4 ; 4]$.
b) $x^3 > (-3)^3$ et x^3 crois. : $x > -3$, soit $]-3 ; +\infty[$.
c) $\sqrt{x} < 4 = \sqrt{16}$ et $\sqrt{x}$ crois. : $x < 16$, soit $[0 ; 16[$.
d) $1/x \geq 1/6$ et $1/x$ déc. sur $]0 ; +\infty[$: $x \leq 6$, soit $]0 ; 6]$.

Correction 4 — Extremums de x^2 [Énoncé]

a) Sur $[-4 ; 1]$:

x	-4		0		1
x^2	16	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Max. $= 16$ en $x = -4$; min. $= 0$ en $x = 0$.

b) Sur $[2 ; 6]$: crois.

x	2		6
x^2	4	$\nearrow$	36

Max. $= 36$ en $x = 6$; min. $= 4$ en $x = 2$.

c) Sur $[-3 ; 5]$:

x	-3		0		5
x^2	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	25

Max. $= 25$ en $x = 5$; min. $= 0$ en $x = 0$.

Correction 5 — Encadrer sans calculer [Énoncé]

a) $49 < 50 < 64$ et $\sqrt{x}$ crois. : $7 < \sqrt{50} < 8$.
b) $8 < 10 < 27$ et x^3 crois. : $2 < \sqrt[3]{10} < 3$.
c) $\frac{1}{2} < \frac{1}{1{,}5} < \frac{1}{1}$, soit $0{,}5 < \frac{2}{3} < 1$.
d) $(-3)^2 = 9 > 6{,}25 = (-2{,}5)^2 > (-2)^2 = 4$, soit $4 < 6{,}25 < 9$.

Correction 6 — Variations de x^2 [Énoncé]

1) $0 \leq a < b : a < b \Rightarrow a \cdot a < a \cdot b$ (car $a > 0$... attention si $a = 0$) et $a \cdot b < b \cdot b$, donc $a^2 < b^2$. f est **croissante** sur $[0 ; +\infty[$.
2) $a < b \leq 0 : |a| > |b| \geq 0$, donc $|a|^2 > |b|^2$, soit $a^2 > b^2$. f est **décroissante** sur $]-\infty ; 0]$.
3)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Correction 7 — Variations de $1/x$ [Énoncé]

1) a) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$. **CQFD**
b) $b - a > 0$ (car $a < b$).
c) $ab > 0$ (car $a, b > 0$).
d) $\frac{b-a}{ab} > 0$, donc $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$: g est **décroissante** sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2) $a < b < 0 : b - a > 0$ et $ab > 0$ (produit de deux négatifs) : même calcul, g décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Correction 8 — Logique [Énoncé]

1) Fausse. La croissance ne se lit pas seulement sur deux valeurs : il faut le vérifier sur tout l'intervalle (ici f a un extremum local en $x \approx -1{,}15$).
2) Faux. $f(3) > f(0)$ ne suffit pas. La fonction pourrait décroître puis recroître sur $[0 ; 3]$.
3) Fausse. $f(x) = x^3 - 4x + 1 \to +\infty$: pas de maximum sur $\mathbb{R}$.

Correction 9 — Calcul formel — maximum [Énoncé]

1) La calculatrice suggère un maximum de 6 en $x = 2$.
2) $f(x) - 6 = -x^2 + 4x + 2 - 6 = -(x-2)^2$.
3) $-(x-2)^2 \leq 0$ donc $f(x) \leq 6$ pour tout x, avec égalité en $x = 2$. Le maximum absolu de f est **6**. **CQFD**

Correction 10 — Fonction rationnelle [Énoncé]

1) À la calculatrice : f déc. sur $[0 ; +\infty[$, crois. sur $]-\infty ; 0]$.
2) $0 \leq a < b : a^2 < b^2$ donc $a^2 + 4 < b^2 + 4$.
3) $a^2 + 4 < b^2 + 4 > 0$ et $1/x$ déc. : $\frac{1}{a^2+4} > \frac{1}{b^2+4}$. **CQFD**
4) $a < b \leq 0 : |a| > |b| \geq 0$, donc $a^2 > b^2$, donc $a^2 + 4 > b^2 + 4$, donc $f(a) < f(b)$: f **croissante** sur $\mathbb{R}^-$.

Correction 11 — Aire d'un disque [Énoncé]

1) $0 < r < s : r^2 < s^2$ (crois. de x^2) donc $\pi r^2 < \pi s^2$: A crois.

CQFD

2) $3 < 5$ et A crois. : $A(3) < A(5)$, soit $9\pi < 25\pi$.
3) $A(r) \leq 25\pi \Leftrightarrow r^2 \leq 25 \Leftrightarrow r \leq 5$. Ensemble-solution : $]0\,;5]$.
4) $4 < 7 < 9$ et A crois. : $A(2) < A(\sqrt{7}) < A(3)$, soit $4\pi < A(\sqrt{7}) < 9\pi$.

Correction 12 — Chute libre [Énoncé]

1) $h(0) = 125$ m ; $h(3) = 80$ m ; $h(5) = 0$ m.
2) t^2 crois. sur $[0\,;5]$, donc $-5t^2$ déc., donc h **déc.** **CQFD**
3)

t	0		5
h	125	↘	0

4) $h(2) = 125 - 20 = 105$ m.
5) $h(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 25 \Leftrightarrow t = 5$ s.

Correction 13 — Distance de freinage [Énoncé]

1) $d(50) = 25$ m ; $d(80) = 64$ m ; $d(130) = 169$ m.
2) $d(v) = \frac{1}{100}v^2$ et v^2 crois. sur $[0\,;+\infty[$: d **crois.**
3) $d(v) < 50 \Leftrightarrow v^2 < 5000 \Leftrightarrow v < \sqrt{5000} \approx 70{,}7$ km/h.

Correction 14 — Périmètre et aire d'un carré [Énoncé]

1) $P(x) = 4x$: **fonction linéaire**. $A(x) = x^2$: **fonction carré**.
2) P : $a = 4 > 0$, crois. $A = x^2$ crois. sur $]0\,;+\infty[$.
3) $P(2x) = 2 \cdot P(x)$: périmètre $\times 2$. $A(2x) = 4 \cdot A(x)$: aire $\times 4$.
4) $A(x) = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50}$. $49 < 50 < 64 \Rightarrow 7 < \sqrt{50} < 8$.

Correction 15 — Fonction rationnelle [Énoncé]

1) À la calculatrice : f crois. sur $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.
2) $\frac{3x-5}{-x+2} = \frac{-3(-x+2)-5+6}{-x+2} = -3 + \frac{1}{-x+2}$. ⊠
3) $t(x) = -x + 2$: affine, $a = -1 < 0$, **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
4) t déc. puis $1/t$ déc. (sur chaque signe) : composition de deux déc. = **crois.** f est croissante sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$.

Correction 16 — Vrai ou faux ? [Énoncé]

a) **Faux.** Déc. sur $]-\infty\,;0]$, crois. sur $[0\,;+\infty[$.
b) **Faux.** Non définie pour $x < 0$.
c) **Vrai.** $a < b < 0 \Rightarrow |a| > |b| \Rightarrow a^2 > b^2$.
d) **Faux.** $-2 < 1 \Rightarrow (-2)^3 < 1^3$, soit $-8 < 1$.
e) **Vrai.** Définition de décroissante.
f) **Vrai.** $\sqrt{0} = 0 \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \geq 0$.

Correction 17 — Courbe — tableau — extremums [Énoncé]

Lecture de la courbe de $f(x) = -\frac{(x-1)^3}{3} + (x-1) + 1$: max. local en $x = 0$ ($f(0) \approx 1{,}67$), min. local en $x = 2$ ($f(2) \approx 0{,}33$).

x	-3		0		2		5
f	$\approx -4{,}3$	↗	$\approx 1{,}7$	↘	$\approx 0{,}3$	↗	$\approx -4{,}3$

Pas d'extremum absolu sur $[-3\,;5]$ (bornes égales). Max. relatif $\approx 1{,}7$ en $x = 0$, min. relatif $\approx 0{,}3$ en $x = 2$.

Correction 18 — Tableau lacunaire avancé [Énoncé]

x	-5		3		8
f	-2	↗	4	↘	0

Max. absolu $= 4$ en $x = 3$. Min. absolu $= -2$ en $x = -5$.

Correction 19 — Encadrement avancé [Énoncé]

a) f déc. sur $[0\,;5]$: $f(2) \in]2\,;10[$, $f(4) \in]2\,;10[$. f crois. sur $[5\,;12]$: $f(7) \in]2\,;9[$, $f(10) \in]2\,;9[$.
b) Min. absolu $= 2$ en $x = 5$. Pas de max. absolu clairement visible (les bornes valent 10 et 9, donc max. absolu$= 10$ en $x = 0$).
c) $f(3) \in]2\,;10[$ et $f(8) \in]2\,;9[$: impossible de comparer directement.

Correction 20 — Problème — trapèze [Énoncé]

1) $\text{Aire}_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot h = \frac{1}{2}x \cdot 3 = \frac{3x}{2}$.
2) $a = \frac{3}{2} > 0$: l'aire est **croissante** en x.
3) L'aire est maximale pour x maximal, soit $x \to 4$ (bord D).

Correction 21 — Problème — rectangle [Énoncé]

1) Largeur $= 10 - x$.
2) $A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$.
3) $A(x) = -(x-5)^2 + 25$: max. en $x = 5$ (à admettre ou montrer).

x	0		5		10
A	0	↗	25	↘	0

4) Le carré de côté 5 cm a l'aire maximale : $A_{\max} = 25$ cm².

Correction 22 — Fonction $\frac{3x^2+4}{x^2+1}$ [Énoncé]

1) Calculatrice : max. $= 4$ en $x = 0$, $f \to 3$ aux infinis.
2) $3 + \frac{1}{x^2+1}$: vérifié par calcul direct.
3) x^2 crois. sur $[0\,;+\infty[$, donc x^2+1 crois., donc $\frac{1}{x^2+1}$ déc. donc f **déc.** sur $[0\,;+\infty[$.
4) Max. absolu $= f(0) = 3 + 1 = \mathbf{4}$ en $x = 0$.

Correction 23 — Croissance et composition [Énoncé]

1) f crois. et g déc. : $a < b \Rightarrow f(a) < f(b) \Rightarrow g(f(a)) > g(f(b))$. $g \circ f$ est **décroissante**.
2) x^2 crois. sur $]0\,;+\infty[$ et $1/t$ déc. sur $]0\,;+\infty[$: $\frac{1}{x^2}$ est **décroissante** sur $]0\,;+\infty[$.

Correction 24 — Synthèse [Énoncé]

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f		2		
			-2	

Exemple : $f(x) = x^3 - 3x$.
Pas d'extremum absolu. Max. relatif $= 2$ en $x = -1$, min. relatif $= -2$ en $x = 1$. Coupe l'axe en $x = 0$, $x = \sqrt{3}$, $x = -\sqrt{3}$.

Correction 25 — Bénéfice optimal [Énoncé]

1) $R(n) = n(20 - \frac{n}{20}) = 20n - \frac{n^2}{20}$.
2) $B(n) = 20n - \frac{n^2}{20} - 2n - 500 = 18n - \frac{n^2}{20} - 500$.
3) $B(0) = -500$, $B(100) = 800$, $B(180) = 1120$, $B(300) = 400$.
4) Calculatrice : max. en $n = 180$ (dérivée : $18 - n/10 = 0 \Rightarrow n = 180$).
5)

n	0	180	300
B		1120	
	-500		400