

Chapitre 14 – Variations d'une fonction

Seconde • Croissance/Décroissance • Tableau de variations • Extrema • Fonctions de référence


Objectifs : reconnaître si une fonction est croissante ou décroissante • déterminer maximum/minimum • dresser un tableau de variations • connaître les variations des fonctions affines et de référence ($x^2, \frac{1}{x}, \sqrt{x}, x^3$).

I Fonctions croissantes et décroissantes

Exemple. $f(x) = 5x - x^2$. Sur $[0; 2,5]$, quand x augmente, $f(x)$ augmente : f est **croissante**.

Définitions.

f **croissante** sur $I : a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
 f **décroissante** sur $I : a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.



Croissance

Remarque : une fonction **monotone** est soit croissante, soit décroissante. Une fonction croissante **conserve** l'ordre ; une décroissante **renverse** l'ordre.


Exercice. Expliquer ce que signifie « une fonction est croissante sur un intervalle ».

Quand x augmente, $f(x)$ augmente aussi.

Exemple. $f(x) = 5x - x^2$ sur $[0; 5] : f(x) \leq f(2,5) = 6,25$.
 Max = 6,25 atteint en $x = 2,5$.

Définition.

Max M en $a : \forall x, f(x) \leq f(a) = M$.
 Min m en $b : \forall x, f(x) \geq f(b) = m$.
 Max ou Min = **extremum**.




Extremum

Exercice. Qu'appelle-t-on extremum ?
Un maximum ou un minimum de f sur un intervalle.

Exemple.

x	0	2,5	5
$f(x)$	0	↗ 6,25	↘ 0



Tableau

Définition.

Indique : domaine, intervalles de croissance/décroissance, extrema.

Exercice. À quoi sert un tableau de variations ?
À résumer le comportement de la fonction.

II Fonctions affines

III Fonctions de référence


Exemples. $f(x) = -x + 6$ $g(x) = -\frac{2}{7}x$.

Propriétés.

$f(x) = ax + b$ ($b = 0$: linéaire).
 $a > 0 \Rightarrow$ crois.; $a < 0 \Rightarrow$ décrois.; $a = 0 \Rightarrow$ const.

Démonstration : $f(p) - f(m) = a(p - m)$. Même signe que a .

Exercice. Variations de $g(x) = 7 - 6x$.
 $a = -6 < 0 \Rightarrow g$ **décroissante sur** \mathbb{R} .




Affine
Variations

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

Décrois. sur $] -\infty; 0]$, crois. sur $[0; +\infty[$.
 $0 \leq a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.
 $a < b \leq 0 \Rightarrow a^2 > b^2$.

Exercice. Comparer $(-4,5)^2$ et $(-2,5)^2$.
 $-4,5 < -2,5 \leq 0$: décrois. $\rightarrow (-4,5)^2 > (-2,5)^2$.




x^2

Formule.

$$a = \frac{f(m) - f(n)}{m - n} \quad (m \neq n)$$

Exemple. $f(-2) = 4, f(3) = 1 : a = \frac{4-1}{-2-3} = -\frac{3}{5}, b = \frac{14}{5}$.

Exercice. f affine, $f(0) = 3, f(2) = 7$.
 $a = 2, b = 3. f(x) = 2x + 3$.




Accroissements
Déterminer f

x	$-\infty$	0^-	0^+	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0^- \searrow$	$-\infty$	$+\infty \searrow$	0^+

Décrois. sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
 a, b même signe : $a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Exercice. Si $0 < a < b$, alors $\frac{1}{a} \dots \frac{1}{b}$.
 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.



$1/x$

x	0		$+\infty$
\sqrt{x}	0	\nearrow	$+\infty$



Crois. sur $[0; +\infty[$.
 $0 \leq a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Exercice. Si $0 \leq a < b$, alors $\sqrt{a} \dots \sqrt{b}$.
 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
x^3	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$



Crois. sur \mathbb{R} .
 $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$.

Exercice. Ranger dans l'ordre croissant : $\frac{1}{8}, 4^3, (-5)^3, (\frac{2}{3})^3, -\frac{1}{8}$.
 $-125 < -\frac{1}{8} < \frac{1}{8} < (\frac{2}{3})^3 \approx 0,30 < 64$.

Fonction	Domaine	Variations	Vidéo
$ax + b, a > 0$	\mathbb{R}	croissante	youtu.be/9x1mMKopd10
$ax + b, a < 0$	\mathbb{R}	décroissante	
x^2	\mathbb{R}	\searrow sur $] -\infty; 0]$, \nearrow sur $[0; +\infty[$	youtu.be/B3mM6LYdsF8
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	\searrow sur chaque intervalle	youtu.be/Vl2rlbFF22Y
\sqrt{x}	$[0; +\infty[$	croissante	youtu.be/qj-liz8TvZ4
x^3	\mathbb{R}	croissante	youtu.be/8h8uAq0wH1A