Chapitre 10 — Equations et inequations

Seconde • Algebre

Table des matières

PROGRAMME (BO — SECONDE • MATHÉMATIQUES)

Contenus : Resoudre une equation du premier degre. Equation-produit ($A \times B = 0$). Equation $x^2 = a$. Equation-quotient ($A/B = 0$). Inequations du premier degre. Tableaux de signes. Inequation-produit et inequation-quotient.

Démonstrations : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$. $\quad x^2 = a > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$. $\quad A/B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ et $B \neq 0$. Diviser par $k < 0$: inverser le sens de l'inequation.

Capacités : Resoudre des equations et inequations du premier et second degre. Dresser un tableau de signes. Resoudre une inequation-produit ou quotient.

Tout le cours

Activites

Objectif : comprendre ce que signifie ”resoudre” et construire la methode.

On considere la balance ci-dessous representant l’equation $3x + 2 = 11$.

1. La balance est en equilibre. Que signifie enlever 2 des deux plateaux ? Quelle equation obtient-on ?
2. La balance reste en equilibre si on divise les deux plateaux par 3. Quelle valeur de x obtient-on ?
3. Verifier : remplacer x par la valeur trouvee dans $3x + 2$ et verifier l’egalite.
4. Resoudre de meme : $5x - 3 = 2x + 9$. Decrire chaque etape comme une operation sur la balance.

$3x = 9$, *puis* $x = 3$. *Verif :* $3 \times 3 + 2 = 11$ $\surd$. $5x - 3 = 2x + 9 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$.

Objectif : comprendre pourquoi $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

1. Calculer les produits suivants : 3×0, $0 \times (-5)$, $(-2) \times 0$, $\pi \times 0$. Que remarque-t-on ?
2. Si $a \times b = 0$, peut-on avoir $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$ en meme temps ? Tester avec $a = 2$ et $b = 3$.
3. En deduire la regle : $A \times B = 0 \iff ?$
4. Resoudre $(2x - 6)(x + 4) = 0$.
   a) Quand le premier facteur est-il nul ?
   b) Quand le second facteur est-il nul ?
   c) Donner l’ensemble solution $\mathcal{S}$.
5. Resoudre $x^2 - 5x = 0$ en factorisant d’abord.

Tout produit par 0 *vaut* 0. $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *ou* $B = 0$. $(2x - 6)(x + 4) = 0$: $x = 3$ *ou* $x = -4$. $x(x - 5) = 0$: $x = 0$ *ou* $x = 5$.

Objectif : comprendre ce que change le signe $<$ par rapport a $=$.

1. On sait que $3 < 7$. Comparer :

a) $3 + 5$ et $7 + 5$
b) $3 - 2$ et $7 - 2$
c) 3×2 et 7×2
d) $3 \times (-1)$ et $7 \times (-1)$

Que se passe-t-il dans le cas d) ?

2. Completer avec $<$ ou $>$:

a) $-2x + 1 \ldots -2 \times 3 + 1$ si $x = 3$
b) Resoudre $-2x + 1 < 7$ en procedant comme pour une equation. Attention au signe lors de la division !

3. On considere l'inequation $2x - 3 \geq 5$.

a) Resoudre algebriquement.
b) Representer la solution sur une droite graduee.
c) Verifier avec $x = 4$, puis $x = 3$.

d) $-3 > -7$: le sens s'inverse. $-2x + 1 < 7 \Rightarrow -2x < 6 \Rightarrow x > -3$ (sens inverse). $2x \geq 8 \Rightarrow x \geq 4$.

1 Equations du premier degre

Definition. Une **equation** est une egalite contenant une inconnue x. Resoudre, c'est trouver tous les x verifiant l'egalite.

Principe d'equivalence : on peut :
$+$ ou $-$ un meme nombre des deux cotes,
$\times$ ou $\div$ par un reel **non nul** des deux cotes.

Notation : $\mathscr{S} = \{x_0\}$ (une solution), $\mathscr{S} = \varnothing$ (aucune).

Methode en 3 etapes :
1. Developper si necessaire.
2. Regrouper les x a gauche, nombres a droite.
3. Diviser par le coefficient de x.

Exprimer x en fonction d'autres :
$U = RI \Rightarrow I = \frac{U}{R}$ $\quad ax + by = c \Rightarrow x = \frac{c - by}{a}$

Methode — Resoudre une equation du premier degre

a) $-5x + 3 = -3x + 2$: $-5x + 3x = 2 - 3 \Rightarrow -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.
$\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
b) $3(x + 4) = -(x + 5) + 2$: $3x + 12 = -x - 3 \Rightarrow 4x = -15 \Rightarrow x = -\frac{15}{4}$.

Pour $ax + b = cx + d$: $(a-c)x = d-b \Rightarrow x = \frac{d-b}{a-c}$ (si $a \neq c$).

Exercice. Resoudre : a) $4x - 3 = 2x + 7$ b) $2(x - 1) = 3(x + 2) - 1$

Methode — Resoudre une equation du premier degre

2 Equation-produit

$A \times B = 0 \iff A = 0$ **ou** $B = 0$

Methode :

1. Mettre sous forme factorisee.
2. Annuler chaque facteur.
3. Reunir les solutions.

Methode — Resoudre une equation-produit

a) $(4x+6)(3-7x) = 0$: $4x+6=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$; $3-7x=0 \Rightarrow x = \frac{3}{7}$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{3}{2}\,;\,\frac{3}{7}\right\}$

b) $5x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(5x-4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \frac{4}{5}$.

Exercice. Resoudre : a) $(2x-1)(x+3) = 0$ b) $x^2 - 5x = 0$

Methode — Resoudre une equation-produit (1)

Methode — Resoudre une equation-produit (2)

3 Equation du type $x^2 = a$

Solutions de $x^2 = a$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a < 0 & \mathcal{S} = \varnothing \\ a = 0 & \mathcal{S} = \{0\} \\ a > 0 & \mathcal{S} = \{-\sqrt{a}\,;\,\sqrt{a}\} \end{cases}$$

Demo $(a > 0)$ **:** $x^2 = a \Leftrightarrow (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a}) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$. **CQFD**

a) $x^2 = 16$: $x = \pm 4$. $\mathcal{S} = \{-4\,;\,4\}$
b) $x^2 = -8$: $\mathcal{S} = \varnothing$
c) $(x+2)^2 = 9$: $x+2 = \pm 3 \Rightarrow x = -5$ ou $x = 1$.

Equation $x^2 = a$

4 Equation-quotient

$\dfrac{A}{B} = 0 \Longleftrightarrow A = 0$ **et** $B \neq 0$

Methode :

1. Valeurs exclues ($B \neq 0$).
2. Resoudre $A = 0$.
3. Eliminer les valeurs exclues.

Methode — Resoudre une equation-quotient

a) $\dfrac{3x+5}{x-1} = 0$: exclusion $x \neq 1$. $3x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \neq 1$.
$\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x+3} = 0$: exclusion $x \neq -3$. $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$. Comme $x \neq -3$: $\mathcal{S} = \{3\}$

Exercice. Resoudre : a) $\dfrac{2x-6}{x+1} = 0$ b) $\dfrac{x^2-4}{x-2} = 0$

Methode — Resoudre une equation-quotient (1)

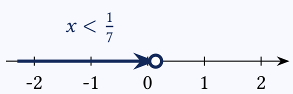
Methode — Resoudre une equation-quotient (2)

5 Inequations du premier degre

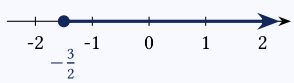
Regles fondamentales :

— $+$ ou $-$ un meme nombre : sens **conserve**.
— $\times$ ou $\div$ par > 0 : sens **conserve**.
— $\times$ ou $\div$ par < 0 : sens **inverse** !

Exemple a) $2x + 3 < 4 - 5x$: $7x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{7}$.
$\mathcal{S} = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{7}\right[$



Exemple b) $2(x-4) \leq 4x - 5$: $-2x \leq 3 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$ *(sens inverse !)*. $\mathcal{S} = \left[-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$



Inequations

6 Tableaux de signes

Pour $ax + b$, racine $x_0 = -\frac{b}{a}$:
— $a > 0$: signe $(-)\ 0\ (+)$
— $a < 0$: signe $(+)\ 0\ (-)$

Exemple $2x + 6$: racine $x = -3$, $a = 2 > 0$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$2x+6$	$-$	0	$+$

Produit $(3x - 9)(1 - 2x)$: racines $x = \frac{1}{2}$ et $x = 3$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$3x-9$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1-2x$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
Produit	$-$	0	$+$	0	$-$

Tableau de signes

7 Inequation-produit et quotient

Methode — Inequation-produit

$(3 - 6x)(x + 2) > 0$: racines $x = \frac{1}{2}$ et $x = -2$.

x	$-\infty$	-2		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$3-6x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
Produit	$-$	0	$+$	0	$-$

$\mathcal{S} = \left]-2\,;\,\frac{1}{2}\right[$

Dresser le tableau de signes, puis lire les intervalles voulus.
Pour $\frac{A}{B} \leq 0$: marquer ‖ la ou $B = 0$. Attention : les valeurs exclues ne sont jamais dans $\mathcal{S}$.

Exercice. Resoudre : a) $(x-1)(x+3) < 0$ b) $\dfrac{x+1}{x-3} < 0$

Methode — Inequation-produit

8 Script Python — equations

Listing 1 : Exerciseur sur les equations — inspiré du TP manuel p.108

```
import random

def resoudre_premier_degre(a, b, c, d):
    """
    Resout ax + b = cx + d.
    Retourne x si unique solution, None sinon.
    """
    if a == c:
        return None  # Pas de solution unique
    return (d - b) / (a - c)

def resoudre_produit(a, b, c, d):
    """
    Resout (ax + b)(cx + d) = 0.
    """
    solutions = []
    if a != 0:
        solutions.append(-b / a)
    if c != 0:
        solutions.append(-d / c)
    return sorted(set(solutions))

def resoudre_x2(a):
    """
    Resout x^2 = a.
    """
    import math
    if a < 0:
        return []
    elif a == 0:
        return [0]
    else:
        return [-math.sqrt(a), math.sqrt(a)]

# --- Exemples ---
print("=== Equations du 1er degre ===")
x = resoudre_premier_degre(4, -3, 2, 7)
print(f"4x - 3 = 2x + 7  =>  x = {x}")

print("\n=== Equations-produit ===")
s = resoudre_produit(2, -6, 1, 4)
print(f"(2x-6)(x+4) = 0  =>  x = {s}")

print("\n=== Equations x^2 = a ===")
for a in [9, 0, -4, 2]:
    sol = resoudre_x2(a)
    print(f"x^2 = {a}  =>  {sol}")
```

Exercice. Modifier `resoudre_produit` pour afficher aussi l'ensemble solution en notation mathematique.

Ajouter : `print(f"S = {sol[0]} ; {sol[1]}")` *si deux solutions.*

Exercice de synthese

1. Resoudre : a) $3x - 2 = x + 6$ b) $2(x + 3) = 5 - (x - 1)$
2. Resoudre : a) $(3x - 1)(2x + 4) = 0$ b) $x^2 - 7x = 0$ c) $(x - 1)^2 - 9 = 0$
3. Resoudre : a) $x^2 = 25$ b) $x^2 = -3$ c) $(x - 4)^2 = 16$
4. Resoudre : a) $\dfrac{2x + 1}{x + 2} = 0$ b) $\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$
5. Resoudre en intervalles : a) $5x - 3 > 2x + 6$ b) $-2x + 1 \leq 5$
6. Dresser le tableau de signes de $(x - 2)(3 - x)$, puis resoudre $(x - 2)(3 - x) \geq 0$.
7. Resoudre $\dfrac{x + 1}{x - 3} < 0$ par tableau de signes.

1. $x = 4$; $x = \frac{2}{3}$. *2.* $\frac{1}{3}$ *ou* -2 ; 0 *ou* 7 ; -2 *ou* 4. *3.* ± 5 ; $\emptyset$; 0 *ou* 8. *4.* $-\frac{1}{2}$; $\{-1\}$. *5.* $]3; +\infty[$; $[-2; +\infty[$. *6.* $[2; 3]$. *7.* $\mathcal{S} =]-1\,;3[$.

Bilan

Equations :
$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$
$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$
$x^2 = a > 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$
$\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$ et $B \neq 0$

Test : $(2x - 3)(x + 1) = 0$?

$x = \frac{3}{2}$ *ou* $x = -1$.

Inequations :
Diviser par $k < 0$: **inverser** le sens !
Tableau de signes : lire les intervalles.
$\frac{A}{B} \leq 0$: attention aux valeurs exclues.

Test : Resoudre $-3x + 6 > 0$.

$x < 2$.

Carte mentale — Equations et inequations