Produit scalaire — Partie 1

Chapitre 9 — 1re Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Produit scalaire de deux vecteurs : définition par le cosinus. Symétrie, bilinéarité. Identités remarquables vectorielles. Lien produit scalaire et normes (formule de polarisation). Théorème d'Al Kashi (loi des cosinus) avec démonstration via produit scalaire.

Démonstrations : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$; $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$. $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$.

Capacités : Calculer un produit scalaire avec la formule du cosinus. Utiliser bilinéarité et identités remarquables. Calculer un produit scalaire à l'aide des normes. Appliquer Al Kashi (longueur ou angle).

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Vecteurs : somme, produit par un scalaire.
- Norme $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$ (distance).
- Théorème de Pythagore.
- Formules trigonométriques dans un triangle rectangle.
- Cosinus d'un angle (Ch. 8) : $\cos\widehat{BAC} \in [-1;1]$.
- Valeurs remarquables : $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, etc.
- Identités remarquables algébriques : $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.
- Triangle équilatéral, isocèle, rectangle.

Produit scalaire	Nouveau type de « produit » entre deux vecteurs : un *nombre réel*.
Définition par le cosinus	$\vec{u}\cdot\vec{v} = \\|\vec{u}\\|\,\\|\vec{v}\\|\cos\theta$.
Propriétés	Symétrie, bilinéarité, identités remarquables vectorielles.
Lien aux normes	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.
Al Kashi	Généralisation de Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.
Lien Ch. 12	Orthogonalité, projections, produit scalaire en repère orthonormé.

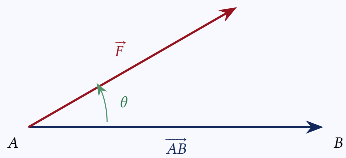
Activités d'introduction

Activité 1 — Le travail d'une force (origine physique)

Objectif : découvrir le produit scalaire à travers son origine physique. *Durée : 15 min.*

En physique, le **travail** d'une force constante $\vec{F}$ pour un déplacement $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

$$W = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\theta$$



où $\theta = (\vec{F}, \overrightarrow{AB})$ est l'angle entre la force et le déplacement.

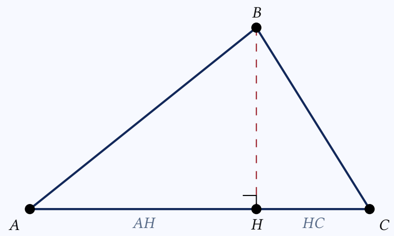
1. Calculer le travail dans les cas suivants ($F = 10$ N, $AB = 5$ m) : **a)** $\theta = 0$ (force dans le sens du déplacement)
b) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (force inclinée à 60°)
c) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (force perpendiculaire au déplacement)
d) $\theta = \pi$ (force opposée au déplacement)

2. Que vaut le travail si $\vec{F} = \vec{0}$? Si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$?
3. Lorsque la force et le déplacement sont **orthogonaux**, que vaut le travail ?

Activité 2 — Des triangles presque rectangles (TICE GeoGebra)

Objectif : découvrir le produit scalaire à partir du projeté orthogonal et de la formule de polarisation. *Durée : 30 min.*

Quand un triangle ABC est rectangle en A, on sait par Pythagore que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Mais combien vaut le nombre $P = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ si le triangle n'est *pas* rectangle ?



1. Dans GeoGebra, construire un triangle ABC quelconque et le projeté orthogonal H de B sur la droite (AC).
2. Dans la ligne de saisie GeoGebra, écrire la formule qui calcule P à l'aide des longueurs.
3. Vérifier que lorsque le triangle est rectangle en A, alors $P = 0$.
4. Démontrer que $P = \frac{1}{2}(AH^2 + AC^2 - CH^2)$. *(Indication : Pythagore dans ABH et CBH.)*
5. On va calculer P selon la position du point H sur la droite (AC) :
a) Quand $H \in [AC]$, en écrivant $CH = AC - AH$, montrer que $P = AC \times AH = AC \times AB \times \cos \widehat{BAC}$.
b) Quand $H \in [AC)$ mais pas sur $[AC]$ (au-delà de C), en écrivant $CH = AH - AC$, montrer que $P = AC \times AH = AC \times AB \cos \widehat{BAC}$.
c) Quand $H \in [CA)$ mais pas sur $[AC]$ (au-delà de A), en écrivant $CH = AC + AH$, montrer que $P = -AC \times AH = AC \times AB \cos \widehat{BAC}$ (*attention au signe de l'angle obtus*).
6. Que peut-on conclure sur la valeur du nombre P ?
Remarque : P s'appelle le **produit scalaire** des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, noté $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

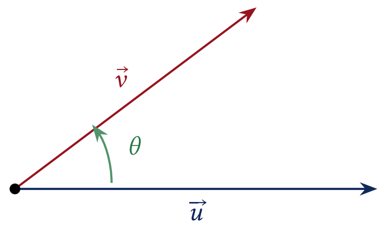
Définitions et propriétés

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, soit $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ une mesure de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta \qquad \in \mathbb{R}.}$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ par convention.

Définition par le cosinus



Avec $\vec{v} = \vec{u}$: $\theta = 0$ donc $\cos\theta = 1$. Ainsi :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times 1 = \|\vec{u}\|^2.$$

On note souvent $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. En particulier, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$.

Exemple détaillé. Soit un triangle ABC avec $AB = 2$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$. Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\frac{\pi}{4} = 2 \times 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}.$$

Exercice d'application. a) Triangle équilatéral ABC de côté 5 : calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
b) Soit I le milieu de $[AB]$. Calculer $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$ (*indication :* construire D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$).

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :
— **Symétrie :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
— **Distributivité :** $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
— **Compatibilité avec le scalaire :** $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Symétrie et bilinéarité

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Exemple — Application directe. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$. Calculer : **a)** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$ **b)** $\vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$ **c)** $-2\vec{v}\cdot(3\vec{u}-\vec{v})$.

Produit scalaire et norme — formule de polarisation

Pour tous points A, B, C :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right).}$$

Formule de polarisation

Cette formule est très utile car elle ne fait intervenir *que* des longueurs.

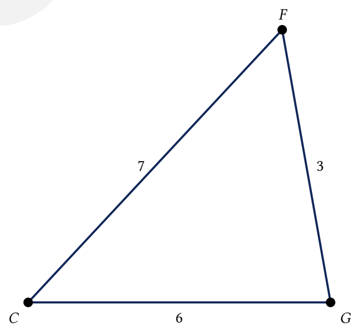
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, donc :

$$\begin{aligned} BC^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} \\ &= AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + AB^2. \end{aligned}$$

On en déduit $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$. ■

Exemple — Calcul direct par les normes. Dans la figure ci-dessous, $CG = 6$, $CF = 7$, $GF = 3$. Calculer $\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CF}$.

$$\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(CG^2+CF^2-GF^2) = \frac{1}{2}(36+49-9) = \frac{1}{2}\times 76 = 38.$$



Exercice d'application. a) ABC avec $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 6$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
b) ABC avec $AB = AC = 2$ et $BC = 3$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{BAC}$ (aigu, droit, obtus) ?

Théorème d'Al Kashi

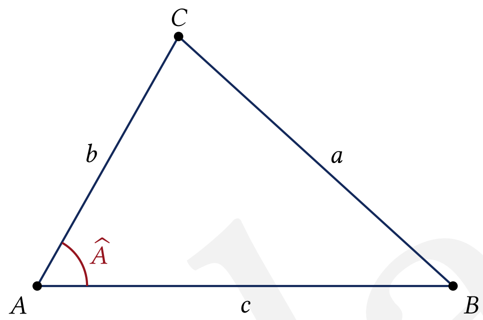
Dans un triangle ABC, on note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Alors :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.}$$

Par symétrie : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$.

Cas particulier : si $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, alors $\cos\widehat{A} = 0$ et on retrouve Pythagore : $a^2 = b^2 + c^2$.

Théorème d'Al Kashi (loi des cosinus)



On utilise les deux expressions du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$:
— *Par le cosinus :* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{A} = bc\cos\widehat{A}$.
— *Par les normes :* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2)$.

En identifiant : $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = bc\cos\widehat{A}$, soit $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos\widehat{A}$, donc :

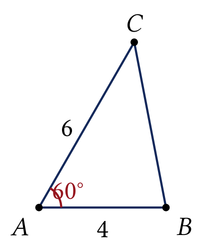
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}.} \blacksquare$$

Dans un triangle ABC, on donne $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = 60°$.
Calculer BC.

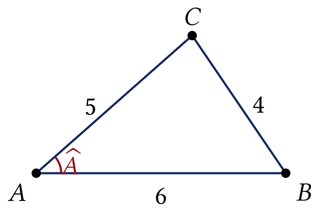
D'après Al Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cos\widehat{A}$.

$$\begin{aligned} BC^2 &= 4^2 + 6^2 - 2\times 4\times 6\times\cos 60° \\ &= 16 + 36 - 48\times\frac{1}{2} = 16 + 36 - 24 = 28. \end{aligned}$$

Donc $BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \approx 5{,}3$.



Dans un triangle ABC, on donne $AB = 6$, $AC = 5$, $BC = 4$. Calculer $\widehat{BAC}$.



D'après Al Kashi : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \widehat{A}$, soit :

$$\begin{aligned}
4^2 &= 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \cos \widehat{A} \\
16 &= 36 + 25 - 60 \cos \widehat{A} \\
60 \cos \widehat{A} &= 36 + 25 - 16 = 45 \\
\cos \widehat{A} &= \frac{45}{60} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Donc $\widehat{A} = \arccos \frac{3}{4} \approx 41°$.

Exercice d'application. a) ABC : $AB = 7$, $AC = 8$, $\widehat{A} = 45°$. Calculer BC.
b) ABC : $AB = 10$, $AC = 12$, $BC = 8$. Calculer $\widehat{A}$ au degré près.

Bilan

- **Définition par le cosinus :** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$.
- **Norme au carré :** $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$; $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2$.
- **Symétrie :** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
- **Bilinéarité :** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$.
- **Identités remarquables :** $(\vec{u}\pm\vec{v})^2 = \vec{u}^2 \pm 2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$.
- **Formule de polarisation :** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$.
- **Al Kashi :** $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$.

Au chapitre 12 nous étudierons :
- L'**orthogonalité** : $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
- La **projection orthogonale** d'un vecteur sur un autre.
- Le produit scalaire **en coordonnées** dans un repère orthonormé : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$.
- L'**équation cartésienne** d'une droite, vecteurs normaux.
- L'**équation d'un cercle** et les lignes de niveau.

Récapitulatif Ch. 9 — à compléter

Reproduis le tableau récapitulatif vu en cours dans la grille ci-dessous.

Carte mentale Ch. 9 — à compléter

À toi de jouer : recopie la carte mentale dans la grille.