Trigonométrie — Partie 1

Chapitre 8 — 1re Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Cercle trigonométrique : centre O, rayon 1, sens direct. Mesure d'un angle au centre en radians ; $180° = \pi$ rad. Enroulement de la droite réelle sur le cercle. Mesure principale d'un angle orienté dans $]-\pi;\pi]$.

Démonstrations : Périmètre du cercle unité $= 2\pi$. Conversion deg/rad par proportionnalité. Deux réels x et x' donnent le même point ssi $x'-x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; on note $x' = x[2\pi]$. La mesure principale est l'unique mesure dans $]-\pi;\pi]$.

Capacités : Convertir un angle deg/rad. Placer un point sur le cercle à partir d'un réel. Lire le réel associé à un point. Déterminer la mesure principale d'un angle.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Périmètre d'un cercle de rayon r : $P = 2\pi r$.
- Mesure d'un angle en degrés : un tour = 360°.
- Sens direct (anti-horaire) sur le cercle.
- Repère orthonormé direct $(O; I, J)$.
- Proportionnalité (règle de trois).
- Symétries axiales et centrales.

Cercle trigonométrique	Cercle de centre O, rayon 1, sens direct.
Radian	Unité telle que $180° = \pi$ rad ; conversion par proportionnalité.
Enroulement	À chaque réel x, on associe un unique point M du cercle.
Congruence modulo 2π	$x' = x[2\pi] \Leftrightarrow x' = x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Mesure principale	Unique mesure dans $]-\pi;\pi]$.
Lien vers Ch. 11	Cosinus, sinus, équations, fonctions trigonométriques.

Activités d'introduction

Activité 1 — Du degré au radian (la roue)

Objectif : introduire le radian comme unité naturelle d'angle. *Durée : 15 min.*

On considère un cercle de rayon 1 (cercle unité). Un point M se déplace sur ce cercle à partir du point $I(1;0)$.
1. Quelle distance M parcourt-il pour faire un tour complet ?
2. Si on définit la mesure d'un angle au centre par la longueur de l'arc parcouru sur le cercle unité, à quel angle (en radians) correspond : **a)** un demi-tour ? **b)** un quart de tour ? **c)** un sixième de tour ? **d)** un huitième de tour ?
3. On rappelle qu'un tour complet correspond à 360°. Compléter : $360° \leftrightarrow$? rad et $180° \leftrightarrow$? rad.
4. En déduire la formule de conversion $\theta_{\text{rad}} = f(\theta_{\text{deg}})$.
5. Application : convertir en radians 30°, 45°, 60°, 90°, 135°.

Correction (prof)

1. Périmètre du cercle unité $= 2\pi \times 1 = 2\pi$.
2. **a)** demi-tour : longueur π, donc π rad. **b)** quart : $\pi/2$ rad. **c)** sixième : $\pi/3$ rad. **d)** huitième : $\pi/4$ rad.
3. $360° \leftrightarrow 2\pi$ rad et $180° \leftrightarrow \pi$ rad.
4. Par proportionnalité : $\theta_{\text{rad}} = \dfrac{\pi}{180}\,\theta_{\text{deg}}$.
5. $30° = \pi/6$, $45° = \pi/4$, $60° = \pi/3$, $90° = \pi/2$, $135° = 3\pi/4$.

Activité 2 — Découvrir le cercle trigonométrique (la piste de course)

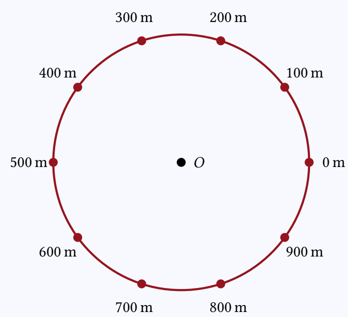
Objectif : découvrir le cercle trigonométrique en tenant compte des congruences. *Durée : 20 min.*

Un professeur d'EPS demande à ses élèves de courir le plus vite possible et de s'arrêter au coup de sifflet.
1. La piste est un cercle de périmètre 1 000 m. Distances parcourues :

Élève	Aurélie	Benjamin	Capucine	Dorian	Éléonore	Fatima
Distance (m)	700	500	1 200	1 700	1 350	1 600

Élève	Grégoire	Hamid	Iris	Julie	Katell	Lili
Distance (m)	350	1 700	800	1 000	1 800	2 000

a) Recopier et compléter le schéma ci-contre en plaçant chaque élève par son initiale. **b)** Quels élèves se retrouvent à la même position sur la piste ? Pourquoi ? **c)** Même question avec une piste de périmètre 200 m. **d)** Donner un exemple de périmètre pour lequel tous les participants se retrouveraient au même endroit.



2. Cercle de rayon 1 km, autre classe. Arrondir à 0,1 km. **a)** Valeur exacte du périmètre. **b)** Cassandre a couru $\frac{1}{4}$ de piste, Terry $\frac{2}{3}$ de piste. Calculer leurs distances. **c)** Placer Nathan $\dfrac{\pi}{4}$, Kenza $\dfrac{2\pi}{3}$, Célia $\dfrac{7\pi}{6}$, William $\dfrac{9\pi}{2}$ (en km) sur le cercle.

Correction (prof)

1. a) Chaque distance est reportée sur le cercle. 1 000 m correspond à un tour complet.
1. b) Deux élèves se retrouvent au même endroit si leurs distances diffèrent d'un multiple de 1 000 m.
— Éléonore (1 350) et Grégoire (350) : différence 1 000. Même endroit.
— Aurélie (700), Dorian (1 700), Hamid (1 700) : Dorian & Hamid font un tour de plus. Même endroit.
— Iris (800) et Katell (1 800) : même endroit.
— Julie (1 000) et Lili (2 000) : même endroit (1 ou 2 tours complets, position 0).
1. c) Avec un périmètre de 200 m, deux élèves se retrouvent si leurs distances diffèrent d'un multiple de 200. Beaucoup de regroupements.
1. d) Un périmètre de 50 m divise toutes les distances. Tous les élèves au même endroit.
2. a) $P = 2\pi R = 2\pi$ km.
2. b) $d_{\text{Cassandre}} = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}6$ km. $d_{\text{Terry}} = 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3} \approx 4{,}2$ km.
2. c) $\frac{\pi}{4}$: 1/8 tour. $\frac{2\pi}{3}$: 1/3 tour. $\frac{7\pi}{6}$: 7/12 tour. $\dfrac{9\pi}{2} = 2 \cdot 2\pi + \dfrac{\pi}{2}$: même position que $\dfrac{\pi}{2}$.

Activité 3 — Lire et placer un point sur le cercle trigonométrique

Objectif : lire et placer un point sur le cercle trigonométrique, comprendre la mesure principale. *Durée : 15 min.*

1. Lire un nombre associé à un point. On place un point A sur le cercle. Donner le nombre associé à A : **a)** dans l'intervalle $[0; 2\pi]$; **b)** dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

2. Placer un point. Placer sur le cercle : **a)** le point A associé à $\dfrac{5\pi}{4}$; **b)** le point B associé à $\dfrac{9\pi}{4}$; **c)** le point C associé à $\dfrac{8\pi}{3}$; **d)** le point D associé à $-\dfrac{9\pi}{2}$.

3. Mesure principale. Une mesure d'un angle est $\dfrac{7\pi}{4}$. Donner la mesure principale (dans $]-\pi; \pi]$) de cet angle.

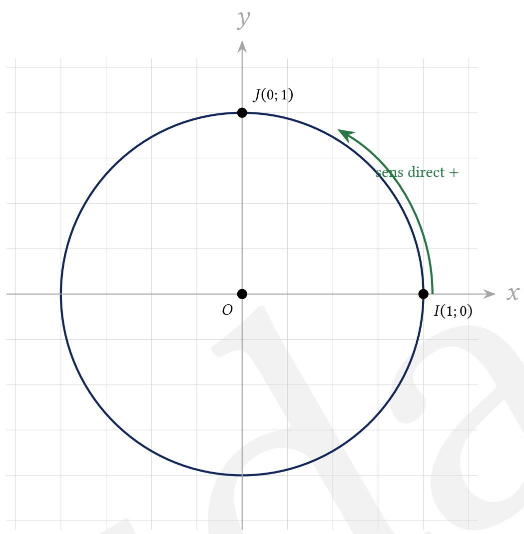
Correction (prof)

1. Méthode : si l'angle est dans le bon intervalle, c'est lui ; sinon, on ajoute ou retranche 2π. Exemple : si le point lu est à $5\pi/4$ dans $[0; 2\pi]$, on a aussi $5\pi/4 - 2\pi = -3\pi/4$ dans $]-\pi; \pi]$.
2. a) $5\pi/4$: entre π et $3\pi/2$ (3e cadran). Dans $]-\pi; \pi]$: $5\pi/4 - 2\pi = -3\pi/4$.
b) $\dfrac{9\pi}{4} = \dfrac{8\pi + \pi}{4} = 2\pi + \dfrac{\pi}{4}$. Même position que $\dfrac{\pi}{4}$.
c) $\dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{6\pi + 2\pi}{3} = 2\pi + \dfrac{2\pi}{3}$. Même position que $\dfrac{2\pi}{3}$.
d) $-\dfrac{9\pi}{2} = -\dfrac{8\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = -4\pi - \dfrac{\pi}{2}$. Même position que $-\dfrac{\pi}{2}$.
3. $\dfrac{7\pi}{4} \notin]-\pi; \pi]$. On retranche 2π : $\dfrac{7\pi}{4} - 2\pi = \dfrac{7\pi - 8\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$. Mesure principale : $-\dfrac{\pi}{4}$.

Cercle trigonométrique et radian

Le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1 dans un repère orthonormé direct $(O; I, J)$. Le **sens direct** (ou trigonométrique, ou positif) est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Cercle trigonométrique



Le **radian** (rad) est l'unité de mesure d'un angle au centre, telle qu'un tour complet vaut 2π rad. Comme un tour vaut aussi 360°, on a :

$$\boxed{180^\circ = \pi\,\text{rad}} \qquad \text{soit} \qquad \theta_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180}\,\theta_{\text{deg}}.$$

Le radian

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	180°	360°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	2π

Exemple — Conversion deg/rad. a) $33^\circ = 33 \times \frac{\pi}{180} = \frac{33\pi}{180} = \frac{11\pi}{60}$ rad.
b) $\frac{3\pi}{8}$ rad $= \frac{3\pi}{8} \times \frac{180}{\pi} = \frac{540}{8} = 67{,}5^\circ$.

Exercice d'application. Convertir : **a)** 75° en rad. **b)** $\frac{5\pi}{12}$ rad en degrés. **c)** 210° en rad. **d)** $\frac{7\pi}{4}$ rad en degrés.

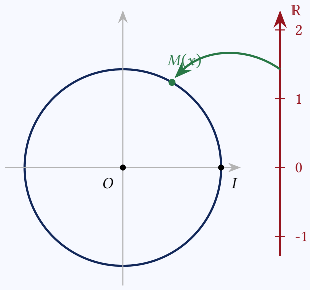
Correction (prof)

a) $75^\circ = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$ rad. **b)** $\frac{5\pi}{12} \times \frac{180}{\pi} = 75^\circ$. **c)** $210^\circ = \frac{210\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$ rad. **d)** $\frac{7\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 315^\circ$.

Enroulement de la droite réelle sur le cercle

On considère la droite tangente $(I, \vec{j})$ au cercle trigonométrique en $I(1;0)$, orientée vers le haut. À chaque réel x sur cette droite, on associe le point M du cercle obtenu en **enroulant** la droite (sens direct si $x > 0$, indirect si $x < 0$).

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ est égale à $|x|$.



Deux réels x et x' sont associés au **même** point sur le cercle si et seulement si leur différence est un multiple de 2π :

$$\boxed{x' = x\,[2\pi] \iff x' - x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

Congruence modulo 2π

Exemple — $\frac{9\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$. $\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} = 2\pi = 1 \times 2\pi$. Donc $\frac{9\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$: ils donnent le même point.

Exemple — Placer $\frac{8\pi}{3}$ sur le cercle.
$\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi + 2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$. Donc même point que $\frac{2\pi}{3}$ (un tour de plus).

Exercice d'application. Pour chaque réel, donner un autre nombre x' associé au même point dans l'intervalle $[0; 2\pi[$: **a)** $\frac{17\pi}{4}$ **b)** $-\frac{5\pi}{3}$ **c)** $\frac{25\pi}{6}$ **d)** $-\frac{11\pi}{2}$.

Correction (prof)

a) $\frac{17\pi}{4} - 2\pi = \frac{17\pi - 8\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$. Encore -2π : $\frac{\pi}{4} \in [0; 2\pi[$.

b) $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{-5\pi + 6\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \in [0; 2\pi[$.

c) $\frac{25\pi}{6} - 4\pi = \frac{25\pi - 24\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \in [0; 2\pi[$.

d) $-\frac{11\pi}{2} + 6\pi = \frac{-11\pi + 12\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \in [0; 2\pi[$.

Mesure principale d'un angle orienté

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté (qui diffèrent d'un multiple de 2π), la **mesure principale** est l'unique mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Mesure principale

Méthode — Mesure principale de $\dfrac{27\pi}{4}$ (Monka).

- On choisit un multiple de 4 proche de 27, soit 28 : $\dfrac{27\pi}{4} = \dfrac{28\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = 7\pi - \dfrac{\pi}{4}$.
- Dans 7π on isole un multiple de 2π, soit $6\pi = 3 \times 2\pi$: $7\pi = 6\pi + \pi$.
- Donc $\dfrac{27\pi}{4} = 6\pi + \pi - \dfrac{\pi}{4} = 6\pi + \dfrac{4\pi - \pi}{4} = 6\pi + \dfrac{3\pi}{4}$.
- $6\pi = 3 \times 2\pi$ représente trois tours complets et $\dfrac{3\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$.

La mesure principale de $\dfrac{27\pi}{4}$ est $\boxed{\dfrac{3\pi}{4}}$.

On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - 2k\pi \in]-\pi;\pi]$. Pratiquement, on calcule $\dfrac{x}{2\pi}$, on prend l'entier k le plus proche, et on retranche $2k\pi$.

Exemple — Mesure principale de $\dfrac{37\pi}{6}$.

$\dfrac{37}{12} \approx 3{,}08$, donc $k = 3$ et $\dfrac{37\pi}{6} - 6\pi = \dfrac{37\pi - 36\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6} \in]-\pi;\pi]$. Mesure principale : $\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice d'application. Donner la mesure principale de : **a)** $\dfrac{17\pi}{3}$ **b)** $-\dfrac{19\pi}{4}$ **c)** $\dfrac{29\pi}{6}$ **d)** $-\dfrac{11\pi}{2}$ **e)** $\dfrac{50\pi}{3}$.

Correction (prof)

a) $\dfrac{17\pi}{3} - 6\pi = \dfrac{17\pi - 18\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$.

b) $-\dfrac{19\pi}{4} + 4\pi = -\dfrac{19\pi - 16\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$.

c) $\dfrac{29\pi}{6} - 4\pi = \dfrac{29\pi - 24\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} \in]-\pi;\pi]$.

d) $-\dfrac{11\pi}{2} + 6\pi = -\dfrac{11\pi - 12\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} \in]-\pi;\pi]$.

e) $\dfrac{50\pi}{3} - 16\pi = \dfrac{50\pi - 48\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} \in]-\pi;\pi]$.

Bilan

- **Cercle trigonométrique** : centre O, rayon 1, sens direct.
- **Radian** : un tour $= 2\pi$ rad ; $180° = \pi$ rad ; $\theta_{\text{rad}} = \dfrac{\pi}{180}\,\theta_{\text{deg}}$.
- **Enroulement** : à chaque réel x, un unique point M du cercle.
- **Congruence** : $x' = x\,[2\pi] \Leftrightarrow x' - x \in 2\pi\mathbb{Z}$.
- **Mesure principale** : unique mesure dans $]-\pi;\pi]$.

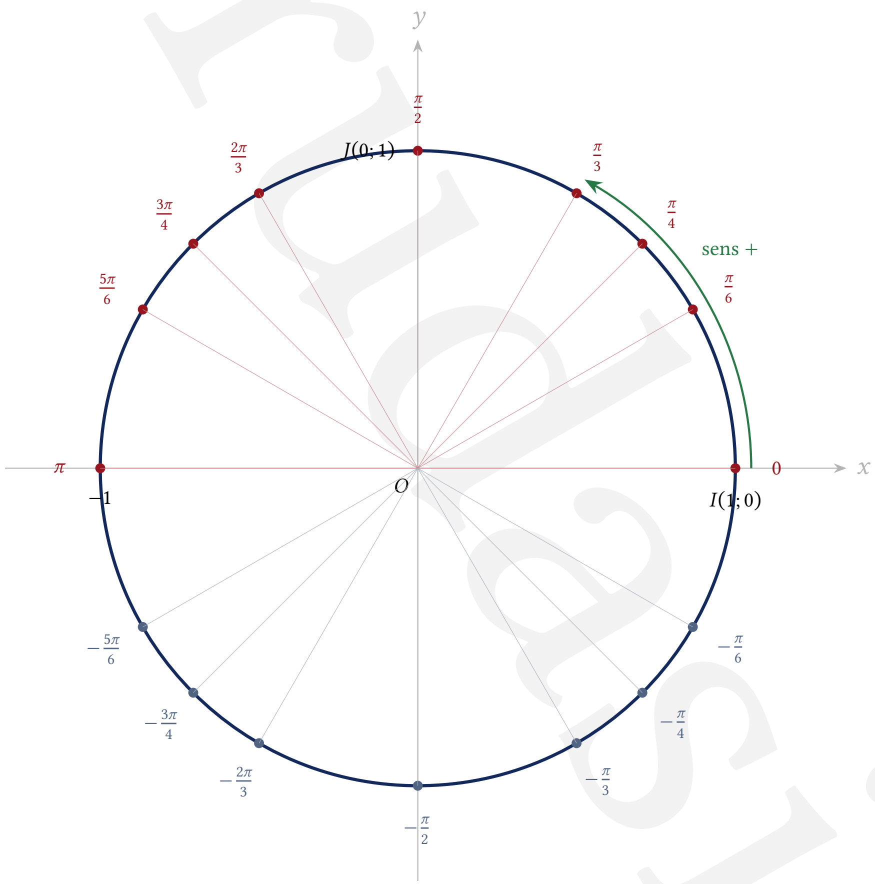
Au chapitre 11 nous définirons :
- Le **cosinus** et le **sinus** d'un nombre réel : $M(\cos x; \sin x)$.
- Les **valeurs remarquables** et leurs démonstrations géométriques.
- Les formules d'**angles associés** ($-x$, $\pi - x$, $\pi + x$, $\pi/2 - x$).
- Les **équations** $\cos x = a$, $\sin x = a$ et leurs solutions sur le cercle.
- Les **fonctions** cos et sin : périodicité, parité, courbes.

Le présent chapitre 8 fournit l'unité d'angle (radian) et le repérage (cercle, mesure principale) qui rendront tout cela possible.

ibrahim-rudasingwa

Cercle trigonométrique — angles remarquables

Tous les angles à connaître entre $-\pi$ et π (mesure principale).



Au Ch. 11, ces angles deviendront les coordonnées $(\cos x ; \sin x)$ *de chaque point.*

Carte mentale — Chapitre 8 — Trigonométrie P1

Les 5 piliers à maîtriser avant le DS.