Suites — Généralités

Chapitre 7 — 1^{re} Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1^{re} Spé Maths

Contenus : Suite numérique : liste ordonnée de nombres réels indexés par $\mathbb{N}$. Notations : (u_n), u_n (terme général de rang n). Modes de définition : explicite ($u_n = f(n)$) ou par récurrence ($u_{n+1} = g(u_n)$). Sens de variation : étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ ou comparaison de u_{n+1}/u_n à 1.

Démonstrations : Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie) vers $\mathbb{R}$. La représentation graphique est un nuage de points isolés (pas une courbe continue). Si $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout n, la suite est strictement croissante.

Capacités : Calculer les premiers termes d'une suite (explicite ou récurrente). Étudier le sens de variation d'une suite. Représenter graphiquement une suite.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Notations $a_1, a_2, \ldots$; indices.
- Fonctions et représentations graphiques.
- Sens de variation d'une fonction.
- Suites particulières (Fibonacci, etc.).
- Récurrence (procédé itératif).
- Calcul littéral et résolution d'équations.

Suite numérique	Liste ordonnée (u_n) : à chaque $n \in \mathbb{N}$, on associe $u_n \in \mathbb{R}$.
Notation	u_n : terme de rang n (différent de $u(x)$ qui est une fonction).
Définition explicite	$u_n = f(n)$: on calcule directement.
Récurrence	$u_{n+1} = g(u_n)$: chaque terme à partir du précédent.
Sens de variation	Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.
Lien vers Ch. 10	Suites arithmétiques et géométriques.

Activités d'introduction

Activité 1 — Premiers termes (Monka)

Objectif : comprendre les deux modes de définition d'une suite. *Durée : 25 min.*

A. Suite explicite. On donne $u_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.
2. Donner u_{10} et u_{100}.

B. Suite récurrente. On donne $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n$ pour tout $n \geq 0$.
1. Calculer u_1, u_2, u_3.
2. Peut-on calculer u_{100} directement avec cette définition ? Pourquoi ?

Correction (prof)

A.1. $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 6$.
A.2. $u_{10} = 20$; $u_{100} = 200$. (Calcul direct.)
B.1. $u_1 = 3 \times 5 = 15$; $u_2 = 3 \times 15 = 45$; $u_3 = 3 \times 45 = 135$.
B.2. Non, il faudrait calculer tous les termes intermédiaires de u_4 à u_{99} ! Pour calculer u_{100} rapidement, il faudrait trouver une formule explicite ($u_n = 5 \times 3^n$).

ibrahim-rudasingwa

1 Définition et notations

Une **suite** (numérique) (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier $n \in \mathbb{N}$, on associe un nombre réel noté u_n.

$u_0, u_1, u_2, \ldots$ sont les **termes** de la suite ; n est le **rang**.

Une suite peut être vue comme une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto u_n$.

Définition — Suite numérique

Dès l'Antiquité, Archimède de Syracuse (−287 ; −212) utilise une procédure itérative pour approcher π : il encadre le cercle par des polygones inscrits/circonscrits ayant un nombre croissant de côtés. C'est une des premières apparitions implicites de la notion de suite.
Le formalisme rigoureux n'apparaîtra qu'au début du XIXe siècle avec Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

2 Modes de définition d'une suite

1) Définition explicite

Une suite (u_n) est définie de manière **explicite** si u_n s'écrit directement en fonction de n :

$$u_n = f(n)$$

On peut alors calculer u_n pour n'importe quelle valeur de n.

Définition — Suite définie explicitement

Méthode — Calculer les premiers termes (Monka)

Calculer les 4 premiers termes des suites : **a)** $u_n = 2n$ **b)** $v_n = 3n^2 - 1$.

a) $u_0 = 0$; $u_1 = 2$; $u_2 = 4$; $u_3 = 6$.
b) $v_0 = -1$; $v_1 = 2$; $v_2 = 11$; $v_3 = 26$.

2) Définition par récurrence

Une suite (u_n) est définie par **récurrence** si on donne :
— le **premier terme** (par ex. u_0),
— une **relation** entre u_{n+1} et u_n (par ex. $u_{n+1} = g(u_n)$).

Définition — Suite définie par récurrence

Méthode — Calculer par récurrence (Monka)

a) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3u_n$. Calculer u_1, u_2, u_3.
$u_1 = 3 \times 5 = 15$; $u_2 = 3 \times 15 = 45$; $u_3 = 3 \times 45 = 135$.

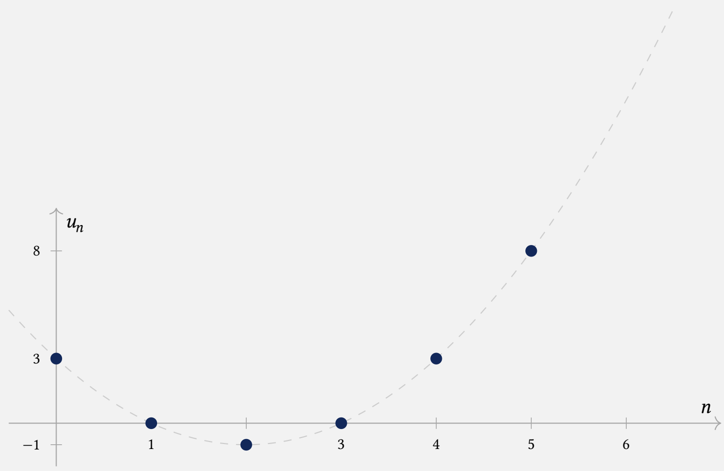
b) $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = 4v_n - 6$. Calculer v_1, v_2, v_3.
$v_1 = 4 \times 3 - 6 = 6$; $v_2 = 4 \times 6 - 6 = 18$; $v_3 = 4 \times 18 - 6 = 66$.

3 Représentation graphique et sens de variation

On représente une suite (u_n) par le **nuage de points** de coordonnées $(n\,;\,u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On obtient des points isolés (pas une courbe continue).

Représentation graphique d'une suite

Exemple — Suite $u_n = n^2 - 4n + 3$



$u_0 = 3$, $u_1 = 0$, $u_2 = -1$, $u_3 = 0$, $u_4 = 3$, $u_5 = 8$. La suite est d'abord décroissante puis croissante.

Soit (u_n) une suite.
— (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n.
— (u_n) est **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n.
— (u_n) est **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n.

Définition — Sens de variation

Méthode 1 (différence) : étudier le signe de $\Delta_n = u_{n+1} - u_n$.
— Si $\Delta_n > 0$ pour tout n : (u_n) strictement croissante.
— Si $\Delta_n < 0$ pour tout n : (u_n) strictement décroissante.
Méthode 2 (quotient, si $u_n > 0$) : comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Méthode — Étudier le sens de variation

Méthode — Étudier le sens de variation

Soit $u_n = n^2 - 3n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Étudier le sens de variation.

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 3(n+1) - (n^2 - 3n) = n^2 + 2n + 1 - 3n - 3 - n^2 + 3n = 2n - 2.$

$2n - 2 > 0 \Leftrightarrow n > 1$. Donc :
— Pour $n = 0$: $u_1 - u_0 = -2 < 0$, $u_0 = 0$, $u_1 = -2$.
— Pour $n \geq 1$: $u_{n+1} - u_n \geq 0$; la suite est croissante à partir du rang 1.
La suite n'est donc **ni croissante ni décroissante** sur $\mathbb{N}$; elle est croissante à partir de $n = 1$.

ibrahim-rudasingwa

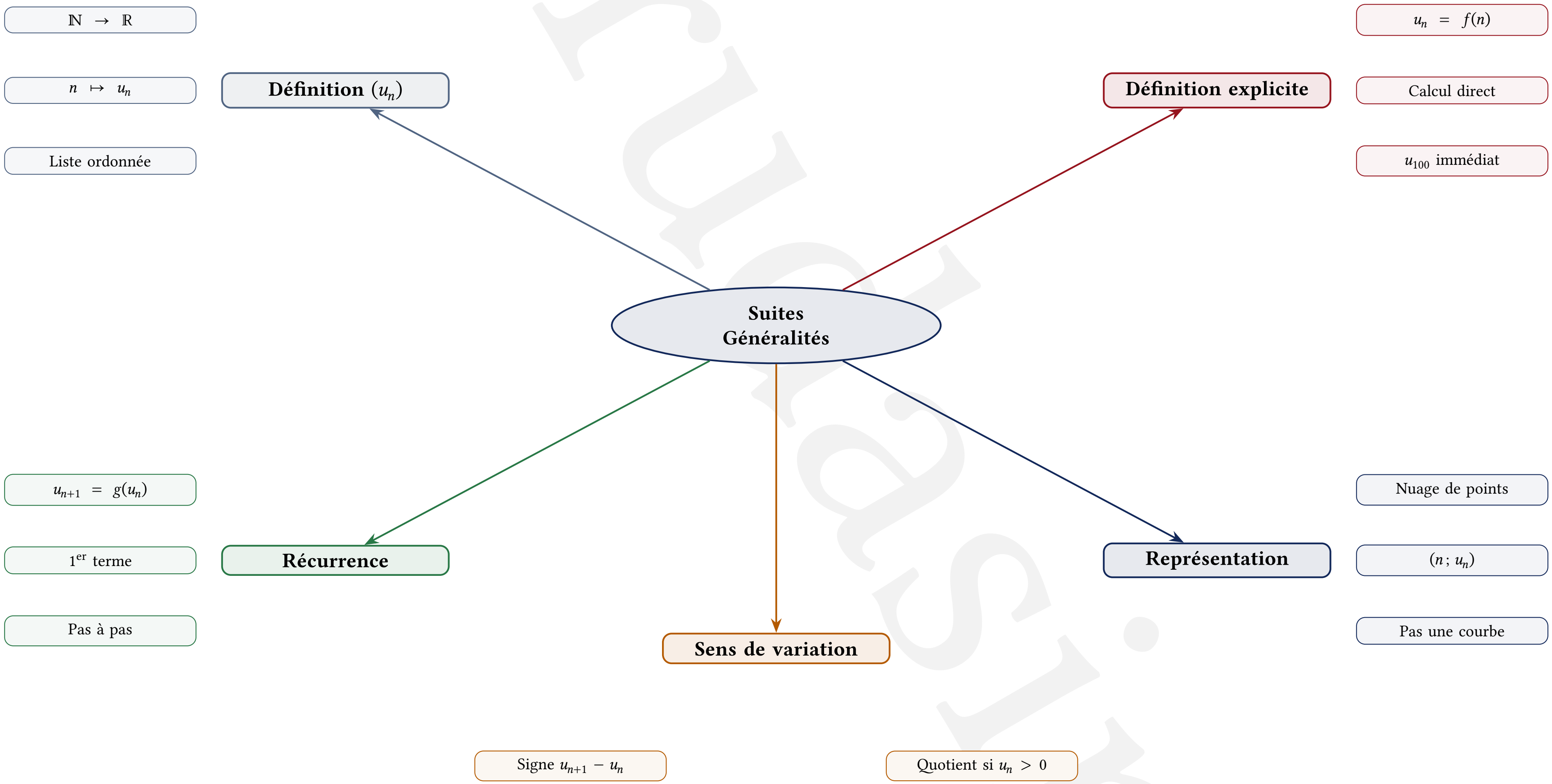
Synthèse à retenir

1. Suite	Liste ordonnée $(u_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$.
2. Définition explicite	$u_n = f(n)$: calcul direct.
3. Définition récurrente	1^{er} terme + relation $u_{n+1} = g(u_n)$.
4. Représentation	Nuage de points $(n\,;\,u_n)$.
5. Sens de variation	Signe de $u_{n+1} - u_n$ (ou u_{n+1}/u_n vs 1).

ibrahim-rudasingwa

Carte mentale — Ch. 7 — Généralités sur les suites

Les 5 piliers à maîtriser avant le DS.



Au Ch. 10, on étudiera les suites arithmétiques et géométriques.