

Dérivation – Partie 3

Chapitre 6 – 1^{re} Spé Maths

Table des matières

Positionnement dans la formation	1
Activités d'introduction	3
Variations et signe de la dérivée	4
Étude des variations d'une fonction	4
Extremum d'une fonction	6
Applications	8
Synthèse à retenir	10

PROGRAMME BO – 1^{re} Spé Maths

Contenus : Théorème : si $f' \geq 0$ sur I , alors f est croissante sur I ; si $f' \leq 0$, f est décroissante. Étude de fonctions polynômes (2nd, 3^e degré) et rationnelles. Caractérisation d'un extremum, position relative de courbes, optimisation.

Démonstrations : Si f' s'annule en changeant de signe en a : extremum local en a . Pour comparer \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g : étudier le signe de $f - g$. Pour optimiser : modéliser, dériver, dresser le tableau, lire l'extremum.

Capacités : Étudier les variations d'une fonction polynôme ou rationnelle. Trouver les extrema, tracer une courbe à partir du tableau. Étudier le signe d'une fonction par ses variations. Étudier la position relative de 2 courbes. Résoudre un problème d'optimisation.

Tout le cours



Positionnement dans la formation

- Nombre dérivé $f'(a)$, tangente.
- Dérivées usuelles, opérations sur les dérivées.
- Si $f' > 0$ alors f est croissante; si $f' < 0$, f décroît.
- Signe d'un trinôme du 2nd degré (Ch. 3).
- Tableau de variations.
- Modélisation par une fonction.

Méthodes systématiques
Caractérisation extremum
Tracer une courbe
Étude du signe
Position relative
Optimisation

Étudier les variations de fonctions polynômes et rationnelles.
 f' s'annule en changeant de signe.
À partir d'un tableau de variations (tangentes horizontales aux extrema).
Utiliser le tableau de variations pour conclure sur le signe.
Signe de $f(x) - g(x)$.
Modéliser, dériver, lire l'extremum sur le tableau.

Activités d'introduction

Activité 1 – Optimisation d'une bordure (Magnard p. 144)

Objectif : découvrir l'optimisation par dérivation. *Durée : 40 min.*

On veut clôturer un jardin rectangulaire d'aire 80 m^2 , adossé à un mur (pas de bordure de ce côté).

$$L_1 \cdot L_2 = 80. \text{ Bordure : } b = 2L_1 + L_2.$$

1. Exprimer L_2 en fonction de $L_1 = x$.

2. En déduire que $b(x) = 2x + \frac{80}{x}$ pour $x \in]0 ; 20]$.

3. Calculer $b'(x)$ et déterminer son signe.

4. Dresser le tableau de variations de b .

5. Quelle valeur de x minimise la bordure ? Quelle est la longueur minimale ?

Correction (prof)

1. $L_2 = \frac{80}{x}$. 2. $b(x) = 2x + \frac{80}{x}$.

3. $b'(x) = 2 - \frac{80}{x^2} = \frac{2x^2 - 80}{x^2}$. Numérateur s'annule pour $x = 2\sqrt{10} \approx 6,32$.

4.

x	0	$2\sqrt{10}$	20	
$b'(x)$		-	0	+
$b(x)$		$+\infty$	$8\sqrt{10}$	44

5. Min en $x = 2\sqrt{10} \approx 6,32 \text{ m}$. $b_{\min} = 8\sqrt{10} \approx 25,30 \text{ m}$.

1 Variations et signe de la dérivée

Soit f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \leq 0$ sur I , alors f est **décroissante** sur I .
- Si $f'(x) \geq 0$ sur I , alors f est **croissante** sur I .
- Si $f'(x) = 0$ sur I , alors f est **constante** sur I .
- Si $f'(x) > 0$ sur I , alors f est **strictement croissante** sur I .



Théorème – Lien fondamental

Méthode – Comprendre le lien f' – variations (Monka)

a) Soit f telle que $f(2) = -1$. On donne le signe de f' . Compléter le tableau de variations.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

b) Soit f telle que $f(4) = 3$. On donne les variations de f . Compléter avec le signe de f' .

x	$-\infty$	4	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			3	

c) On donne la courbe (sommet en $(-2; 5)$, frimousse triste). Compléter le tableau.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			5	

2 Étude des variations d'une fonction

1) Fonction polynôme du 2nd degréMéthode – 2nd degré (Monka)

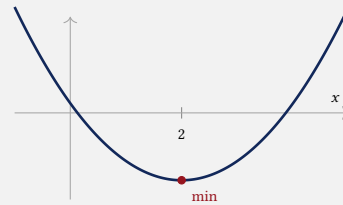
Soit $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$ sur \mathbb{R} . a) Calculer f' . b) Étudier son signe. c) Dresser le tableau de variations.

a) $f'(x) = 4x - 8$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. f' est affine, pente $4 > 0$: croissante. Donc $f' < 0$ avant 2, $f' > 0$ après.

c) $f(2) = 2 \times 4 - 16 + 1 = -7$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-7	$+\infty$

2) Fonction polynôme du 3^e degréMéthode – 3^e degré (Monka)

Soit $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$ sur \mathbb{R} . Étudier les variations.

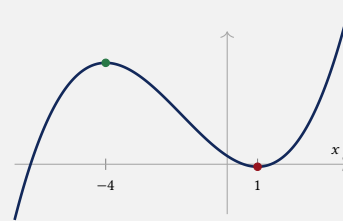
a) $f'(x) = 3x^2 + 9x - 12$.

b) $\Delta = 81 + 144 = 225 > 0$. $x_1 = \frac{-9 - 15}{6} = -4$; $x_2 = \frac{-9 + 15}{6} = 1$.

Comme $a = 3 > 0$: $f' > 0$ à l'extérieur, $f' < 0$ entre.

c) $f(-4) = -64 + 72 + 48 + 5 = 61$; $f(1) = 1 + \frac{9}{2} - 12 + 5 = -\frac{3}{2}$.

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	61	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$	



Conclusion : f a un **maximum local** 61 en -4 et un **minimum local** $-\frac{3}{2}$ en 1.

3) Fonction rationnelle

Méthode – Fonction rationnelle (Monka)

Soit $f(x) = \frac{x+3}{2-x}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Étudier les variations.

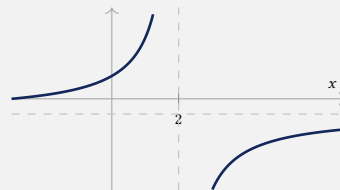
a) On pose $u(x) = x+3$ ($u' = 1$) et $v(x) = 2-x$ ($v' = -1$).

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \times (2-x) - (x+3) \times (-1)}{(2-x)^2} = \frac{2-x+x+3}{(2-x)^2} = \frac{5}{(2-x)^2}$$

b) $(2-x)^2$ est un carré, donc toujours strictement positif sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Donc $f'(x) > 0$.

c) f est strictement croissante sur $] -\infty ; 2[$ et sur $]2 ; +\infty[$ (mais pas sur la réunion!).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$+\infty - \infty$ ↙ -1		-1 ↘ $+\infty - \infty$



La double-barre || dans le tableau signifie que f n'est pas définie en $x = 2$.

3 Extremum d'une fonction

Soit f dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Si f' s'annule en changeant de signe en a , alors f admet un **extremum local** en $x = a$:

- f' passe de $+$ à $-$: **maximum local** en a .
- f' passe de $-$ à $+$: **minimum local** en a .



Théorème – Caractérisation d'un
extremum

Méthode – Déterminer un extremum (Monka)

Soit $f(x) = 5x^2 - 10x + 1$ sur \mathbb{R} . Étudier l'extremum + tangente au point de l'extremum.

a) $f'(x) = 10x - 10$.

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. f' est affine, pente $10 > 0$: $f' < 0$ avant 1, $f' > 0$ après.

c) $f(1) = 5 - 10 + 1 = -4$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘ -4		↗ $+\infty$

d) f admet un **minimum** égal à -4 atteint en $x = 1$.

e) Au point de l'extremum, $f'(1) = 0$: la tangente est **horizontale** (parallèle à l'axe des abscisses). Comme $f(1) = -4$, l'équation de la tangente est $y = -4$.

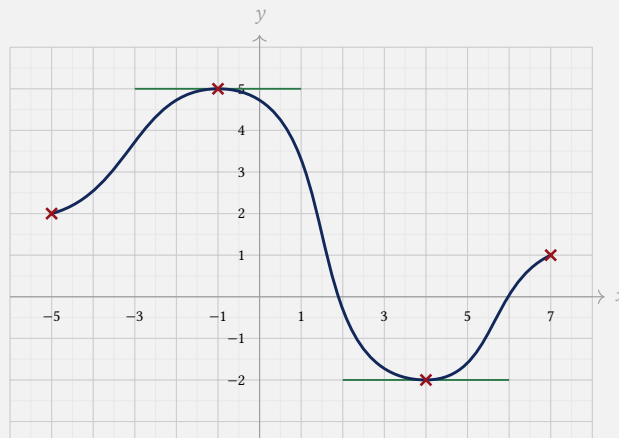
Méthode – Tracer une courbe à partir du tableau (Monka)

On donne le tableau de variations de f sur $[-5 ; 7]$. Tracer une représentation graphique.

x	-5	-1	4	7			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	2	→	5	↘	-2	↗	1

Méthode :

- Placer les points $(-5 ; 2)$, $(-1 ; 5)$, $(4 ; -2)$ et $(7 ; 1)$.
- En $x = -1$ et $x = 4$: $f' = 0$, donc **tangentes horizontales** aux points $(-1 ; 5)$ et $(4 ; -2)$.
- Tracer une courbe lisse passant par les 4 points en respectant les tangentes horizontales.



4 Applications

1) Étude du signe d'une fonction

Méthode – Signe d'une fonction par les variations (Monka)

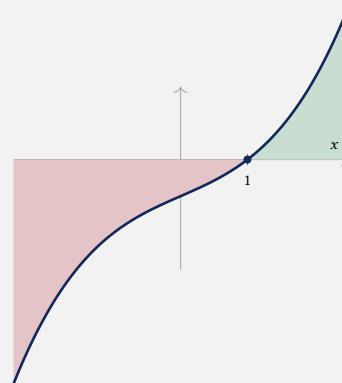
Soit $f(x) = x^3 + 4x - 5$ sur \mathbb{R} . **a)** Démontrer que f est strictement croissante. **b)** Vérifier que 1 est racine. **c)** Dresser le tableau et déterminer le signe.

a) $f'(x) = 3x^2 + 4$. Comme un carré est positif et $4 > 0$, $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

b) $f(1) = 1 + 4 - 5 = 0$. ☒ Donc 1 est racine.

c) Tableau + signe :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	$-\infty$		$+\infty$



Conclusion : f est **négative** sur $] -\infty ; 1]$ et **positive** sur $[1 ; +\infty[$.

2) Position relative de deux courbes

Pour étudier la position relative de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g : étudier le signe de $h(x) = f(x) - g(x)$.

- $h(x) > 0$: \mathcal{C}_f **au-dessus** de \mathcal{C}_g .
- $h(x) < 0$: \mathcal{C}_f **en-dessous** de \mathcal{C}_g .
- $h(x) = 0$: courbes **coupées** (ou tangentes).



Méthode – Position relative

Méthode – Position de 2 courbes (Monka)

$f(x) = x^3$ et $g(x) = -5x + 18$ sur $[2; +\infty[$. Étudier la position relative.

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - (-5x + 18) = x^3 + 5x - 18.$$

$h'(x) = 3x^2 + 5 > 0$. Donc h est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

$$h(2) = 8 + 10 - 18 = 0.$$

Tableau :

x	2	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	0	$+\infty$

Donc $h(x) \geq 0$ sur $[2; +\infty[$, soit $f(x) \geq g(x)$.

Conclusion : \mathcal{C}_f est **au-dessus** de \mathcal{C}_g sur $[2; +\infty[$ (avec égalité en $x = 2$).

3) Optimisation**Méthode – Optimisation (Monka : composants)**

Une entreprise fabrique des composants. Pour x milliers de composants, le coût (en milliers d'€) est $C(x) = 0,2x^2 + 24x + 20$, $x \in [0; 30]$. La recette est $R(x) = 30x$.

Déterminer le bénéfice maximal et le nombre de composants à produire.

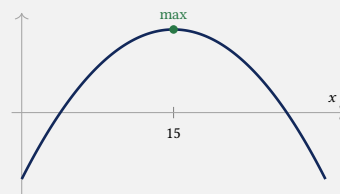
Bénéfice : $B(x) = R(x) - C(x) = 30x - (0,2x^2 + 24x + 20) = -0,2x^2 + 6x - 20$.

Dérivée : $B'(x) = -0,4x + 6$.

Signe : $B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$. B' est affine, pente $-0,4 < 0$: décroissante. Donc $B' > 0$ avant 15, $B' < 0$ après.

Tableau de variations + maximum :

x	0	15	30
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	-20	25	-20



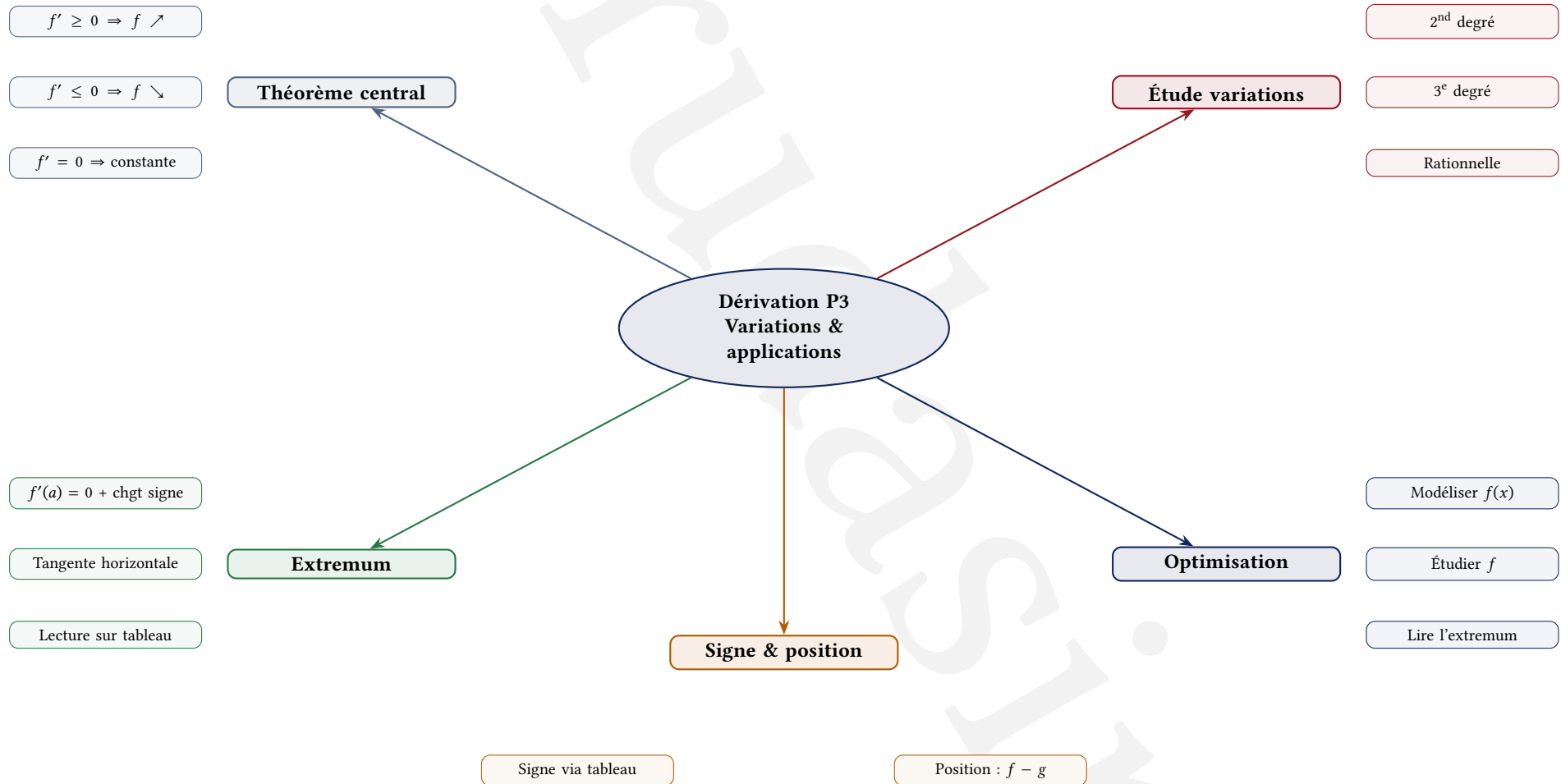
Conclusion : B atteint son maximum en $x = 15$ avec $B(15) = 25$. Le **bénéfice maximal** est de 25 000 € pour 15 000 composants produits.

Synthèse à retenir

1. Théorème central	$f' \geq 0 \Rightarrow f \nearrow; f' \leq 0 \Rightarrow f \searrow.$
2. Étude des variations	Méthodes pour 2 nd degré, 3 ^e degré, fonction rationnelle.
3. Extremum	f' s'annule en changeant de signe \Rightarrow extremum local. Tangente horizontale.
4. Tracer une courbe	À partir d'un tableau : points + tangentes horizontales aux extrema.
5. Applications	Signe d'une fonction, position relative ($f - g$), optimisation.

Carte mentale – Ch. 6 – Dérivation P3

Les 5 piliers à maîtriser avant le DS.



La dérivation est désormais entièrement maîtrisée.