Probabilités conditionnelles

Chapitre 5 — 1re Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Probabilité conditionnelle $P_A(B)$. Formule $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (avec $P(A) > 0$). Arbre pondéré et formule des probabilités totales. Événements indépendants : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Démonstrations : Sur un arbre pondéré : la somme des poids partant d'un même nœud vaut 1. $P(A \cap B)$ = produit le long du chemin $A \to B$. Indépendance $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Capacités : Calculer une probabilité conditionnelle (tableau ou formule). Construire un arbre pondéré et l'utiliser. Appliquer la formule des probabilités totales. Tester l'indépendance.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Probabilité d'un événement : $P(A) \in [0\,;\,1]$.
- Événement contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- Réunion : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Tableaux d'effectifs et fréquences.
- Diagrammes en arbre (situations à 2 issues).
- Univers, événement élémentaire.

Probabilité conditionnelle	$P_A(B)$: probabilité de B sachant que A est réalisé.
Formule clé	$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (avec $P(A) > 0$).
Arbre pondéré	Outil visuel ; somme des poids = 1 ; produit le long d'un chemin.
Probabilités totales	$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.
Indépendance	A, B indépendants $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
Lien vers Ch. 15	Variables aléatoires, espérance, variance.

1 Probabilités conditionnelles

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé. On la note :

$$\boxed{P_A(B)}$$

On a toujours $0 \leq P_A(B) \leq 1$.

Définition — Probabilité conditionnelle

Soit A et B deux événements avec $P(A) > 0$. Alors :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Conséquence : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Propriété — Formule fondamentale

Soit A et B deux événements avec $P(A) > 0$. Alors :

$$\boxed{P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)}$$

Conséquence immédiate de $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$ (les deux issues conditionnelles sont exhaustives).

Propriété — Loi de la probabilité totale du complément

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32. Soit A : « pique » et B : « roi ».

$P(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{32}$ (un seul roi de pique).

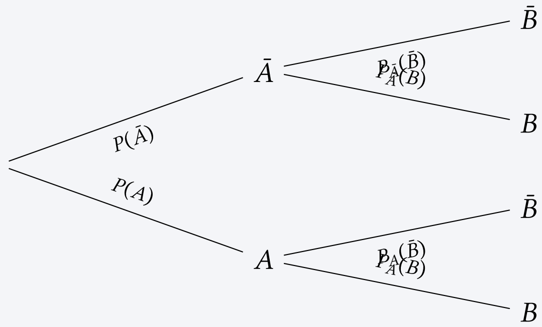
Donc $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/32}{1/4} = \frac{4}{32} = \boxed{\frac{1}{8}}$.

2 Arbres pondérés et probabilités totales

— Sur les branches partant d'un **même nœud**, la somme des poids vaut 1.
— Un **poids de branche** est une probabilité conditionnelle (sauf à la racine).
— Le **produit le long d'un chemin** donne P de l'intersection.
— Pour P d'un événement, on additionne les probabilités des chemins qui y mènent.

Règles de l'arbre pondéré

Exemple — Arbre à 2 niveaux



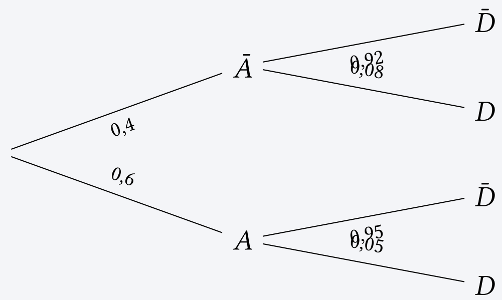
$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$; $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.

Si A et $\bar{A}$ forment une **partition** de l'univers (cas le plus simple), alors pour tout événement B :

$$\boxed{P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)}$$

Théorème — Formule des probabilités totales

Exemple — Arbre avec calcul numérique



$P(D) = 0{,}6 \times 0{,}05 + 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}062$.

Un laboratoire teste 800 patients : 455 traités par A (dont 383 guéris), 345 par B (dont 291 guéris).

Tableau récapitulatif :

	Médic. A	Médic. B	Total
Guéri	383	291	674
Non guéri	72	54	126
Total	455	345	800

a) $P_G(A)$: probabilité d'avoir pris A sachant guéri.

$$P_G(A) = \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{383/800}{674/800} = \frac{383}{674} \approx 0{,}568.$$

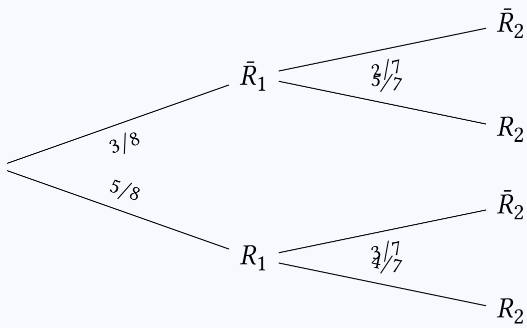
b) $P_B(G)$: probabilité de guérir sachant traité par B.

$$P_B(G) = \frac{P(B \cap G)}{P(B)} = \frac{291/800}{345/800} = \frac{291}{345} \approx 0{,}843.$$

Vidéo Monka : tableau Vidéo Monka : formule

Une urne contient 5 boules rouges et 3 noires. On tire successivement **sans remise** deux boules.

Arbre :



Calcul : $P(R_2) = P(R_1) \cdot P_{R_1}(R_2) + P(\bar{R}_1) \cdot P_{\bar{R}_1}(R_2) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$. Vidéo Monka : arbre pondéré Vidéo Monka : probabilités totales

3 Indépendance de deux événements

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

Définition — Indépendance

A et B indépendants $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$ (lorsque $P(A) \neq 0$).

Interprétation : savoir que A s'est produit ne change pas la probabilité de B.

Propriété équivalente

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. R : « roi », T : « trèfle ».

a) Jeu standard 32 cartes.
$P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, $P(R \cap T) = \frac{1}{32}$ (un seul roi de trèfle).
$P(R) \cdot P(T) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(R \cap T)$.
$\Rightarrow$ R et T **indépendants**.

b) Avec 2 jokers ajoutés (34 cartes).
$P(R) = \frac{4}{34}$, $P(T) = \frac{8}{34}$, $P(R \cap T) = \frac{1}{34}$.
$P(R) \cdot P(T) = \frac{32}{1156} \neq \frac{34}{1156} = P(R \cap T)$.
$\Rightarrow$ ils **ne sont plus** indépendants.

Dans une population, la maladie m touche 0,5% des individus, la maladie n touche 1%. On suppose ces deux événements indépendants.

Probabilité d'avoir au moins l'une des deux maladies ?
$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$ (formule générale)
$= P(M) + P(N) - P(M) \cdot P(N)$ *(par indépendance)*
$= 0{,}005 + 0{,}01 - 0{,}005 \times 0{,}01 = 0{,}01495 \approx 1{,}5\%$.

Vidéo Monka

Si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B le sont aussi.

Démonstration : $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cdot P(B) = P(B) \cdot (1 - P(A)) = P(\bar{A}) \cdot P(B)$. ■

Vidéo Monka

4 Répétition d'expériences indépendantes

Si on répète n fois une même expérience aléatoire et que les résultats sont **mutuellement indépendants**, alors :

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)}$$

Principe

On lance 3 fois un dé équilibré à 6 faces. Les lancers sont indépendants.

a) Probabilité d'obtenir trois fois la face 6 **?**

$P(\text{trois fois } 6) = P(6) \cdot P(6) \cdot P(6) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \approx 0{,}46\%.$

b) Probabilité de ne jamais obtenir 6 sur 3 lancers ?

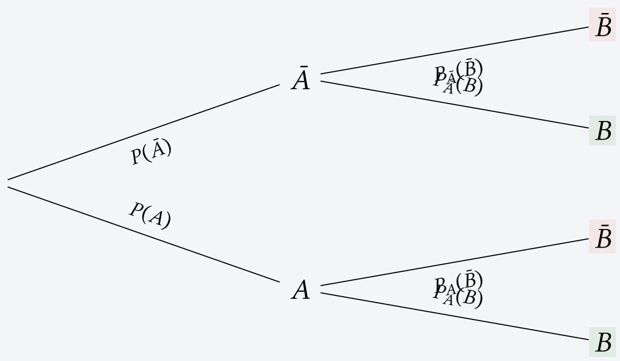
$P(\bar{6} \cap \bar{6} \cap \bar{6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 57{,}9\%.$

c) Probabilité d'obtenir au moins une fois le 6 ?

$P(\text{au moins un } 6) = 1 - P(\text{aucun } 6) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 42{,}1\%.$

Synthèse graphique — Hall of Fame

Notion	**Formule**	**Quand l'utiliser**
Probabilité conditionnelle	$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$	Calcul direct
Probabilités composées	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$	Multiplier le long d'un chemin
Probabilités totales	$P(B) = \sum_i P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)$	Partition $\{A_i\}$
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	Vérifier ou utiliser
Répétitions indép.	$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \prod P(A_i)$	Lancers, tirages avec remise



4 chemins : $A \to B$, $A \to \bar{B}$, $\bar{A} \to B$, $\bar{A} \to \bar{B}$. $P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$ (somme des chemins menant à B).

Bilan

- **Probabilité conditionnelle** : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ (avec $P(A) \neq 0$).
- **Formule des probabilités composées** : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$.
- **Arbre pondéré** : poids partant d'un nœud somment à 1 ; produit le long d'un chemin = P d'intersection.
- **Probabilités totales** (partition $\{A, \bar{A}\}$) : $P(B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$.
- **Indépendance** : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, équivaut à $P_A(B) = P(B)$.
- **Répétition d'expériences indépendantes** : $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Carte mentale — Chapitre 5 — Probabilités conditionnelles

Les 5 axes essentiels à maîtriser avant le DS.