

## Dérivation – Partie 2

Chapitre 4 – 1<sup>re</sup> Spé Maths

### Table des matières

Positionnement dans la formation .....	1
Activités d'introduction .....	2
Dérivées des fonctions usuelles .....	3
Opérations sur les fonctions dérivées .....	4
Lien dérivée – variations – extrema .....	5
Synthèse à retenir .....	8

#### PROGRAMME BO – 1<sup>re</sup> Spé Maths

**Contenus :** Fonction dérivée. Dérivées des fonctions usuelles ( $x^n$ ,  $1/x$ ,  $\sqrt{x}$ ). Opérations : somme, produit par un réel, produit, inverse, quotient. Lien fondamental : signe de  $f'$  et sens de variation de  $f$ . Extrema locaux et globaux.

**Démonstrations :** Si  $f' > 0$  sur  $I$  alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$ . Si  $f' < 0$  sur  $I$  alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .  $f'(a) = 0$  avec changement de signe  $\Leftrightarrow$  extremum local en  $a$ .

**Capacités :** Calculer la dérivée d'une fonction usuelle ou composée d'opérations. Étudier le signe de  $f'$  et dresser le tableau de variations. Trouver les extrema d'une fonction.

Tout le cours



### Positionnement dans la formation

- |   |  |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>– Nombre dérivé : <math>f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}</math>.</li> <li>– Tangente : <math>y = f'(a)(x - a) + f(a)</math>.</li> <li>– Pente d'une sécante = taux d'accroissement.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>– Sens de variation, tableau de variations.</li> <li>– Signe d'un trinôme du 2<sup>nd</sup> degré (Ch. 3).</li> <li>– Extremum d'une parabole (Ch. 1).</li> </ul> |
|---|--|

**Fonction dérivée**  
**Dérivées usuelles**  
**Opérations**  
**Lien  $f'$  – variation**  
**Extrema**  
**Lien vers Ch. 6**

On passe du nombre dérivé en  $a$  à la fonction  $f'$  définie sur  $I$ .  
 Tableau des formules ( $x^n$ ,  $1/x$ ,  $\sqrt{x}$ , etc.).  
 Comment dériver  $u + v$ ,  $ku$ ,  $uv$ ,  $u/v$ .  
**Théorème central :** signe de  $f'$  donne le sens de variation de  $f$ .  
 $f'(a) = 0$  avec changement de signe  $\Rightarrow$  extremum local en  $a$ .  
 Optimisation : trouver les extrema dans des problèmes concrets.

## Activités d'introduction

### Activité 1 – Relier une fonction et sa dérivée (Magnard p. 144)

**Objectif** : découvrir le lien entre la variation d'une fonction et le signe de sa dérivée. *Durée* : 40 min.

#### A. Conjecture par lecture graphique

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 10$ . On a tracé sa courbe  $\mathcal{C}_f$  et on observe que la tangente en un point  $A$  est « montante » ou « descendante ».

1. Lorsque la tangente est « montante » en  $A$ , que peut-on dire du signe du coefficient directeur  $f'(x_A)$ ? Et de la fonction  $f$  près de  $A$ ?

2. Même question lorsque la tangente est « descendante ».

3. Sur la courbe, on observe que : **a)**  $f'(x) \geq 0$  sur  $] -\infty ; -1]$ ; **b)**  $f'(x) \leq 0$  sur  $[-1 ; 5]$ ; **c)**  $f'(x) \geq 0$  sur  $[5 ; +\infty[$ .

4. Quand vaut-on  $f'(x) = 0$ ?

5. Dresser le tableau de variations de  $f$  en utilisant  $f(-1) = 18$  et  $f(5) = -90$ .

6. Conjecturer une règle générale liant signe de  $f'$  et sens de variation de  $f$ .

#### B. Étude algébrique

1. On admet que  $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$ . Calculer le discriminant et vérifier les racines.

2. Étudier le signe de  $f'(x)$ .

3. Vérifier que cela correspond aux résultats de la partie A.

### Correction (prof)

**A.1.** Tangente « montante » : pente positive, donc  $f'(x_A) > 0$ . Localement,  $f$  est croissante.

**A.2.** Tangente « descendante » :  $f'(x_A) < 0$ . Localement,  $f$  décroît.

**A.4.**  $f'(x) = 0$  aux extrema, soit  $x = -1$  et  $x = 5$ .

**A.5.** Tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$-1$	$5$	$+\infty$			
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		18		-90		$+\infty$

**A.6. Règle** : si  $f' > 0$  sur un intervalle  $I$ ,  $f$  est croissante sur  $I$ ; si  $f' < 0$  sur  $I$ ,  $f$  est décroissante sur  $I$ .

**B.1.**  $\Delta = 144 + 180 = 324 > 0$ .  $x_1 = \frac{12 - 18}{6} = -1$ ,  $x_2 = \frac{12 + 18}{6} = 5$ .  $\square$

**B.2.**  $a = 3 > 0$  :  $f'(x) > 0$  pour  $x < -1$  ou  $x > 5$ ,  $f'(x) < 0$  pour  $-1 < x < 5$ .

**B.3.** Cohérent avec A.5.

## 1 Dérivées des fonctions usuelles

On dit qu'une fonction  $f$  est **dérivable sur un intervalle**  $I$  si elle est dérivable en tout réel de  $I$ .

La fonction qui à tout  $x \in I$  associe le nombre dérivé  $f'(x)$  s'appelle la **fonction dérivée** de  $f$ , et se note  $f'$ .



Définition – Fonction dérivée

Le mot « dérivé » vient du latin *derivare* signifiant « détourner un cours d'eau ». Il a été introduit par Joseph Louis Lagrange (1736-1813) pour signifier que cette nouvelle fonction *dérive* (au sens de « provenir ») d'une autre.

### Démonstration au programme – Dérivée de $x^2$ (Monka)

Soit  $f(x) = x^2$ . Démontrons que  $f'(x) = 2x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Pour  $h \neq 0$  et  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h.$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a.$$

On a donc  $f'(a) = 2a$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Donc  $f'(x) = 2x$ . ■

### Démonstration au programme – Dérivée de $1/x$ (Monka)

Soit  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Démontrons que  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ .

Pour  $h \neq 0$  et  $h \neq -a$  :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{ha(a+h)} = -\frac{1}{a(a+h)}.$$

$$\text{Donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{1}{a^2}.$$

On a donc  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ . ■

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine de dérivabilité
$k$ (constante)	0	$\mathbb{R}$
$ax$ ( $a \in \mathbb{R}$ )	$a$	$\mathbb{R}$
$x^2$	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$



Théorème – Dérivées usuelles

La fonction  $\sqrt{x}$  est définie sur  $]0; +\infty[$  mais dérivable seulement sur  $]0; +\infty[$  (pas en 0).

**Démonstration.** Pour  $h > 0$  :  $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ .

Or  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$  (n'est pas un nombre fini).

Donc  $\sqrt{x}$  n'est pas dérivable en 0. Géométriquement : la courbe a une **tangente verticale** en 0. ■

### Méthode – Dériver les fonctions usuelles (Monka)

Calculer la dérivée de chacune des fonctions :

$$f(x) = 100; \quad g(x) = -5x; \quad h(x) = x^4; \quad k(x) = \frac{1}{x^3}; \quad m(x) = \sqrt{x}.$$

#### Correction :

- $f'(x) = 0$  (constante)
- $g'(x) = -5$  (forme  $ax$ )
- $h'(x) = 4x^3$  (formule  $nx^{n-1}$  avec  $n = 4$ )
- $k'(x) = -\frac{3}{x^4}$  (formule  $-n/x^{n+1}$  avec  $n = 3$ )
- $m'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

## 2 Opérations sur les fonctions dérivées

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur  $I$ , et  $k \in \mathbb{R}$ . Alors :

Fonction	Dérivée
$u + v$	$u' + v'$
$ku$	$ku'$
$uv$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ (avec $u \neq 0$ )	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ (avec $v \neq 0$ )	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$



Théorème – Opérations sur les dérivées

**Démonstration au programme – Dérivée du produit (Monka)**

Soient  $u$  et  $v$  dérivables sur  $I$ ,  $a \in I$ . Démontrons que  $(uv)'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$ .

Pour  $h \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \cdot v(a+h) + u(a) \cdot \frac{v(a+h) - v(a)}{h}. \end{aligned}$$

On passe à la limite :  $u'(a) \cdot v(a) + u(a) \cdot v'(a)$ . ■

**Méthode – Calculer une dérivée**

Soit  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ . Calculer  $f'(x)$ .

On applique les formules à chaque terme :

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 - 0 = \boxed{6x^2 - 10x + 7}.$$

Soit  $g(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$ . Calculer  $g'(x)$ .

On utilise la formule du produit avec  $u(x) = x^2 + 1$  ( $u'(x) = 2x$ ) et  $v(x) = 3x - 2$  ( $v'(x) = 3$ ) :

$$g'(x) = 2x \cdot (3x - 2) + (x^2 + 1) \cdot 3 = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = \boxed{9x^2 - 4x + 3}.$$

**Dérivée de la fonction composée  $f(ax + b)$** 

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  ( $a \neq 0$ ) et  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ . La fonction  $g(x) = f(ax + b)$  est dérivable et :

$$\boxed{g'(x) = a \cdot f'(ax + b)}$$

(On dérive l'extérieur en gardant l'argument, puis on multiplie par  $a$ , dérivée de l'intérieur.)



Théorème – Dérivée de

$g(x) = f(ax + b)$

**Méthode – Dériver  $f(ax + b)$  (Monka)**

Calculer la dérivée de : 1)  $g(x) = (7x + 1)^4$  2)  $h(x) = \sqrt{5x - 4}$ .

1) On pose  $f(u) = u^4$  donc  $f'(u) = 4u^3$ . Avec  $u = 7x + 1$  et  $a = 7$  :

$$g'(x) = 7 \cdot 4(7x + 1)^3 = \boxed{28(7x + 1)^3}.$$

2) On pose  $f(u) = \sqrt{u}$  donc  $f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ . Avec  $u = 5x - 4$  et  $a = 5$  :

$$h'(x) = 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x - 4}} = \boxed{\frac{5}{2\sqrt{5x - 4}}}.$$

**3 Lien dérivée – variations – extrema**

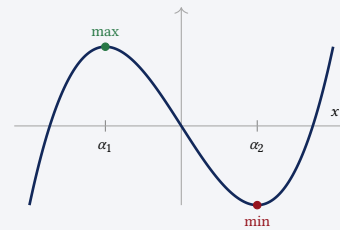
Soit  $f$  dérivable sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in I$  (sauf éventuellement en quelques points isolés où  $f' = 0$ ), alors  $f$  est **strictement croissante** sur  $I$ .
- Si  $f'(x) < 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est **strictement décroissante** sur  $I$ .
- Si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $f$  est **constante** sur  $I$ .



Théorème – Lien fondamental  
(admis)

$x$	$-\infty$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		$f(\alpha_1)$		$f(\alpha_2)$		



Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  et  $a \in I$ .

- $f$  admet un **maximum local** en  $a$  s'il existe un voisinage de  $a$  sur lequel  $f(x) \leq f(a)$ .
- $f$  admet un **minimum local** en  $a$  s'il existe un voisinage de  $a$  sur lequel  $f(x) \geq f(a)$ .

Un **extremum local** est soit un maximum local, soit un minimum local.



Définition – Extremum local

Soit  $f$  dérivable sur  $I$  et  $a \in I$  (intérieur).

$f$  admet un **extremum local** en  $a$  si et seulement si  $f'$  s'annule en changeant de signe en  $a$ .

- $f'$  passe de + à - : **maximum local** en  $a$ .
- $f'$  passe de - à + : **minimum local** en  $a$ .



Théorème – Caractérisation d'un  
extremum (admis)

$f'(a) = 0$  **ne suffit pas** pour avoir un extremum. Il faut un **changement de signe** de  $f'$ .

Contre-exemple :  $f(x) = x^3$  a  $f'(0) = 0$  mais  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  (pas d'extremum).

**Méthode – Étudier les variations d'une fonction**

Soit  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  sur  $\mathbb{R}$ .

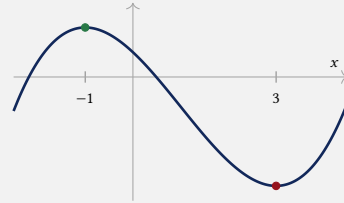
**Étape 1 :**  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ .

**Étape 2 :** Signe de  $f'(x)$  : trinôme avec  $\Delta = 36 + 108 = 144 > 0$ .  $x_1 = \frac{6-12}{6} = -1$ ,  $x_2 = \frac{6+12}{6} = 3$ .

Comme  $a = 3 > 0$ ,  $f'(x) > 0$  à l'extérieur des racines.

**Étape 3 :** Tableau de variations avec illustration :

$x$	$-\infty$	$-1$	$3$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$10$	$-22$	$+\infty$	



**Conclusion :**  $f$  admet un **maximum local**  $f(-1) = 10$  et un **minimum local**  $f(3) = -22$ .

## Synthèse à retenir

**1. Fonction dérivée**

$f'$  : à chaque  $x$  on associe le nombre dérivé  $f'(x)$ .

**2. Dérivées usuelles**

$(x^n)' = nx^{n-1}$ ;  $(1/x)' = -1/x^2$ ;  $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ .

**3. Opérations**

$(u + v)' = u' + v'$ ;  $(ku)' = ku'$ ;  $(uv)' = u'v + uv'$ ;  $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$ .

**4. Lien  $f'$  – variation**

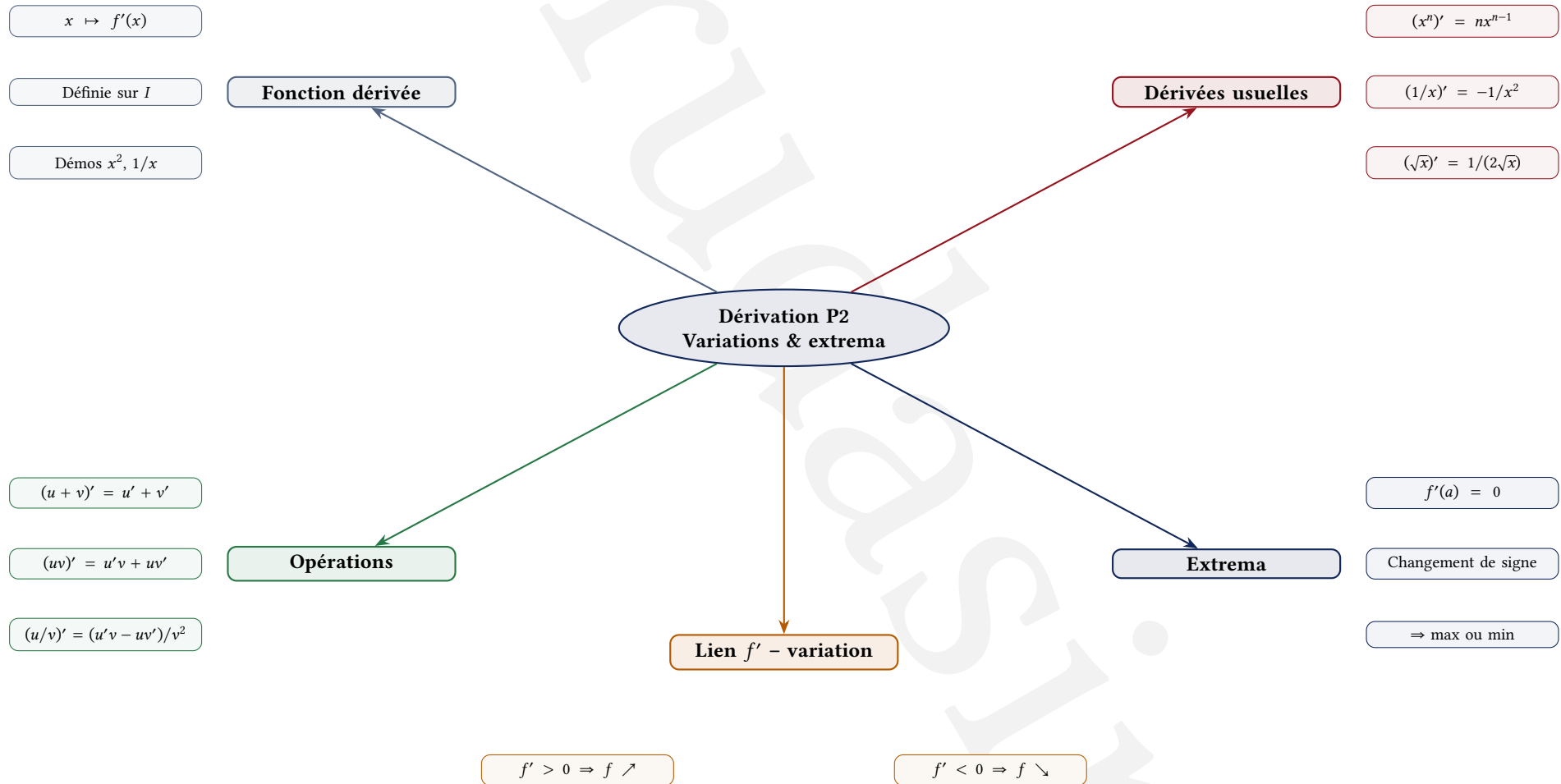
$f' > 0 \Rightarrow f \nearrow$ ;  $f' < 0 \Rightarrow f \searrow$ ;  $f' = 0 \Rightarrow f$  constante.

**5. Extrema**

$f'(a) = 0$  et changement de signe  $\Rightarrow$  extremum local en  $a$ .

# Carte mentale – Chapitre 4 – Dérivation P2

Les 5 piliers à maîtriser avant le DS.



*Au Ch. 6, on appliquera tout cela à des problèmes d'optimisation.*