Dérivation — Partie 2

Chapitre 4 — 1re Spé Maths

Table des matières

Positionnement dans la formation 1
Activités d'introduction 2
Dérivées des fonctions usuelles 4
Opérations sur les fonctions dérivées 5
Lien dérivée – variations – extrema 6
Synthèse à retenir 8

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Fonction dérivée. Dérivées des fonctions usuelles (x^n, $1/x$, $\sqrt{x}$). Opérations : somme, produit par un réel, produit, inverse, quotient. Lien fondamental : signe de f' et sens de variation de f. Extrema locaux et globaux.

Démonstrations : Si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I. Si $f' < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I. $f'(a) = 0$ avec changement de signe ⇔ extremum local en a.

Capacités : Calculer la dérivée d'une fonction usuelle ou composée d'opérations. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations. Trouver les extrema d'une fonction.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Nombre dérivé : $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- Tangente : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
- Pente d'une sécante = taux d'accroissement.
- Sens de variation, tableau de variations.
- Signe d'un trinôme du 2^{nd} degré (Ch. 3).
- Extremum d'une parabole (Ch. 1).

Fonction dérivée	On passe du nombre dérivé en a à la fonction f' définie sur I.
Dérivées usuelles	Tableau des formules (x^n, $1/x$, $\sqrt{x}$, etc.).
Opérations	Comment dériver $u+v$, ku, uv, u/v.
Lien f' – variation	**Théorème central** : signe de f' donne le sens de variation de f.
Extrema	$f'(a) = 0$ avec changement de signe ⇒ extremum local en a.
Lien vers Ch. 6	Optimisation : trouver les extrema dans des problèmes concrets.

Activités d'introduction

Activité 1 — Relier une fonction et sa dérivée (Magnard p. 144)

Objectif : découvrir le lien entre la variation d'une fonction et le signe de sa dérivée. *Durée : 40 min.*

A. Conjecture par lecture graphique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 10$.

1. Lorsque la tangente est « montante » en un point A, que peut-on dire du signe de $f'(x_A)$? Et de f près de A ?

2. Même question lorsque la tangente est « descendante ».

3. Sur la courbe : $f'(x) \geq 0$ sur $]-\infty\,;-1]$, $f'(x) \leq 0$ sur $[-1\,;5]$, $f'(x) \geq 0$ sur $[5\,;+\infty[$.

4. Pour quelles valeurs $f'(x) = 0$?

5. Dresser le tableau de variations de f avec $f(-1) = 18$ et $f(5) = -90$.

6. Conjecturer une règle générale liant signe de f' et sens de variation de f.

B. Étude algébrique

1. On admet que $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$. Calculer le discriminant et vérifier les racines.

2. Étudier le signe de $f'(x)$.

1 Dérivées des fonctions usuelles

On dit qu'une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I si elle est dérivable en tout réel de I.

La fonction qui à tout $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de f, et se note $\boxed{f'}$.

Définition — Fonction dérivée

Le mot « dérivé » vient du latin *derivare* signifiant « détourner un cours d'eau ». Il a été introduit par Joseph Louis Lagrange (1736-1813) pour signifier que cette nouvelle fonction *dérive* d'une autre.

Démonstration au programme — Dérivée de x^2 (Monka)

Soit $f(x) = x^2$. Démontrons que $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Pour $h \neq 0$ et $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h.$$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$. D'où $f'(x) = 2x$. ■

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Domaine de dérivabilité
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
ax ($a \in \mathbb{R}$)	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;\,+\infty[$

Théorème — Dérivées usuelles

Méthode — Dériver les fonctions usuelles

Calculer la dérivée de :

$$f(x) = 100\,; \quad g(x) = -5x\,; \quad h(x) = x^4\,; \quad k(x) = \frac{1}{x^3}\,; \quad m(x) = \sqrt{x}.$$

2 Opérations sur les fonctions dérivées

Soient u et v dérivables sur I, $k \in \mathbb{R}$.

Fonction	Dérivée
$u+v$	$u'+v'$
ku	ku'
uv	$u'v+uv'$
$\frac{1}{u}\ (u \neq 0)$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}\ (v \neq 0)$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Théorème — Opérations sur les dérivées

Méthode — Calculer une dérivée

Soit $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. Calculer $f'(x)$.

Soit $g(x) = (x^2+1)(3x-2)$. Calculer $g'(x)$.

Dérivée de la fonction composée $f(ax+b)$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) et f dérivable. Pour $g(x) = f(ax+b)$:

$$\boxed{g'(x) = a \cdot f'(ax+b)}$$

Théorème — Dérivée de $g(x) = f(ax+b)$

Méthode — Dériver $f(ax+b)$ (Monka)

Calculer la dérivée de : **1)** $g(x) = (7x+1)^4$ **2)** $h(x) = \sqrt{5x-4}$.

3 Lien dérivée – variations – extrema

Soit f dérivable sur I.
— Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **strictement croissante** sur I.
— Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **strictement décroissante** sur I.
— Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est **constante** sur I.

Théorème — Lien fondamental (admis)

f admet un **extremum local** en a si et seulement si f' s'annule **en changeant de signe** en a.
— f' passe de $+$ à $-$: **maximum local**.
— f' passe de $-$ à $+$: **minimum local**.

Théorème — Caractérisation d'un extremum

$f'(a) = 0$ **ne suffit pas** pour avoir un extremum. Il faut un changement de signe de f'.
Contre-exemple : $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$ mais f est strictement croissante.

Méthode — Étudier les variations

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur $\mathbb{R}$.
Étape 1 : Calculer $f'(x)$.

Étape 2 : Étudier le signe de $f'(x)$.

Étape 3 : Dresser le tableau de variations et conclure sur les extrema.

Synthèse à retenir

1. Fonction dérivée	f' : à chaque x on associe $f'(x)$.
2. Dérivées usuelles	$(x^n)' = nx^{n-1}$; $(1/x)' = -1/x^2$; $(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$.
3. Opérations	$(u+v)' = u' + v'$; $(uv)' = u'v + uv'$; $(u/v)' = (u'v - uv')/v^2$.
4. Lien f' – variation	$f' > 0 \Rightarrow f \nearrow$; $f' < 0 \Rightarrow f \searrow$.
5. Extrema	$f'(a) = 0$ + changement de signe $\Rightarrow$ extremum local.

Carte mentale Ch. 4 — à compléter

À toi de jouer : recopie la carte mentale (5 piliers : fonction dérivée, dérivées usuelles, opérations, lien f'–variation, extrema).