Second degré — Partie 2

Chapitre 3 — 1re Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas : $\Delta < 0$ (pas de solution réelle), $\Delta = 0$ (une racine double), $\Delta > 0$ (deux racines distinctes). Factorisation $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$. Signe d'un trinôme : du signe de a à l'extérieur des racines.

Démonstrations : Formules : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Somme $S = -\frac{b}{a}$, produit $P = \frac{c}{a}$. Inéquations : on résout en utilisant le tableau de signes.

Capacités : Calculer un discriminant et résoudre $ax^2 + bx + c = 0$. Factoriser un trinôme. Étudier le signe d'un trinôme. Résoudre une inéquation du second degré.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
- Forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
- Sommet $S(\alpha\,;\,\beta)$ et axe de symétrie $x = \alpha$.
- Identités remarquables : $(a \pm b)^2$, $(a+b)(a-b)$.
- Équation produit nul.
- Tableau de signes d'un produit / quotient.

Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$, le « juge » d'une équation du 2nd degré.
Racines	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$: x_1, x_2 (selon le signe de Δ).
Factorisation	$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ si $\Delta > 0$; $a(x-x_0)^2$ si $\Delta = 0$; impossible si $\Delta < 0$.
Somme–Produit	$S = -\frac{b}{a}$, $P = \frac{c}{a}$: utile pour deviner les racines.
Signe du trinôme	Du signe de a à l'extérieur des racines, du signe de $-a$ entre.
Inéquations	On lit le signe sur le tableau de signes.

Activités d'introduction

Activité 3 — Résoudre des équations du second degré (Magnard p. 83)

Objectif : résoudre des équations du second degré par méthodes successives. *Durée : 30 min.*

A. Équations simples

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: **a)** $x^2 = 16$ **b)** $x^2 = 8$ **c)** $x^2 = -1$ **d)** $(x-3)(x+2) = 0$.

2. Factoriser puis résoudre : **a)** $x^2 + 10x = 0$.

B. Méthode de la complétion du carré

1. Vérifier que $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

2. En déduire que $x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$.

3. Résoudre alors $x^2 + 4x + 3 = 0$ en utilisant cette écriture.

Correction (prof)

A.1. a) $x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = -4$. $\mathcal{S} = \{-4\,;\,4\}$. **b)** $x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \sqrt{8}$ ou $x = -\sqrt{8}$. $\mathcal{S} = \{-2\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{2}\}$. **c)** $x^2 = -1$: un carré est positif. $\mathcal{S} = \varnothing$. **d)** $(x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -2$. $\mathcal{S} = \{-2\,;\,3\}$.

A.2. $x^2 + 10x = x(x+10) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -10$. $\mathcal{S} = \{-10\,;\,0\}$.

B.1. $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$. ⊠

B.2. $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1$.

B.3. $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+2-1)(x+2+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -3$. $\mathcal{S} = \{-3\,;\,-1\}$.

Activité 4 — Étudier le signe d'un trinôme (Magnard p. 83)

Objectif : étudier le signe d'un trinôme à partir de sa courbe. *Durée : 20 min.*

On considère trois fonctions f, g et h dont on donne les courbes :

1. Pour $f(x) = x^2 - 4x + 3$, on observe que la courbe coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ et $x = 3$. **a)** Résoudre $f(x) = 0$. **b)** Résoudre $f(x) > 0$. **c)** Donner le tableau de signes de f.

2. Pour $g(x) = (x-1)^2$, on observe que la courbe touche l'axe des abscisses en $x = 1$. **a)** Résoudre $g(x) = 0$. **b)** Résoudre $g(x) > 0$. **c)** Donner le tableau de signes de g.

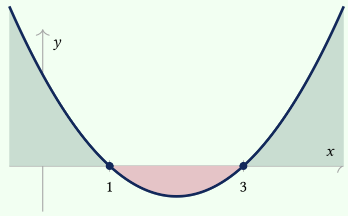
3. Pour $h(x) = -x^2 - 1$, on observe que la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses. **a)** Résoudre $h(x) = 0$. **b)** Résoudre $h(x) > 0$. **c)** Donner le tableau de signes de h.

4. Conjecturer une règle générale pour le signe d'un trinôme selon le nombre de racines.

Correction (prof)

1. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$. $\mathcal{S} = \{1\,;\,3\}$. **b)** $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ ou $x > 3$. $\mathcal{S} =]-\infty\,;\,1[\,\cup\,]3\,;\,+\infty[$. **c)** Tableau de signes de $f(x) = x^2 - 4x + 3$, illustré par la courbe :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



Vert : $f > 0$ • Rouge : $f < 0$

2. a) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. **b)** $g(x) > 0$ pour $x \neq 1$. **c)** Tableau : g est de signe constant $+$, sauf en $x = 1$ où elle s'annule.
3. a) $h(x) = 0$: aucune solution ($-x^2 - 1 \leq -1 < 0$). **b)** $h(x) > 0$ jamais. **c)** h est strictement négative sur $\mathbb{R}$.
4. Règle : le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines (s'il y en a), du signe de $-a$ entre les racines. S'il n'y a pas de racine, il est du signe de a partout.

1 Résolution d'une équation du second degré

Une **équation du second degré** est une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ le nombre :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Définition — Équation du second degré, discriminant

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta < 0$: pas de solution réelle ($\mathscr{S} = \varnothing$).
- Si $\Delta = 0$: une unique solution (« racine double ») : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: deux solutions distinctes : $\boxed{x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$.

Théorème — Résolution selon le signe de Δ

Démonstration (à connaître — Monka)

On utilise la forme canonique du Ch. 1 :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a},\ \beta = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Donc $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = 0$, soit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Cas 1 : $\Delta < 0$. Le membre de gauche est positif (carré), le membre de droite est négatif. Pas de solution.

Cas 2 : $\Delta = 0$. L'équation devient $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, soit $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Cas 3 : $\Delta > 0$. On a $x + \dfrac{b}{2a} = \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, soit $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. ■

Méthode — Résoudre une équation du second degré (Monka)

Résoudre : **a)** $2x^2 - x - 6 = 0$ **b)** $2x^2 - 3x + \dfrac{9}{8} = 0$ **c)** $x^2 + 3x + 10 = 0$.

a) $a = 2$, $b = -1$, $c = -6$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49 > 0$.

Deux solutions : $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{49}}{4} = \dfrac{1-7}{4} = -\dfrac{3}{2}$; $x_2 = \dfrac{1+7}{4} = 2$. $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\ ;\ 2\right\}$.

b) $a = 2$, $b = -3$, $c = \dfrac{9}{8}$: $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times \dfrac{9}{8} = 9 - 9 = 0$.

Une racine double : $x_0 = \dfrac{3}{4}$. $\mathscr{S} = \left\{\dfrac{3}{4}\right\}$.

c) $a = 1$, $b = 3$, $c = 10$: $\Delta = 9 - 40 = -31 < 0$. $\mathscr{S} = \varnothing$.

Pour une fonction $f(x) = ax^2+bx+c$, les solutions de $ax^2+bx+c = 0$ s'appellent les **racines** de f.
Une racine x_1 vérifie $f(x_1) = 0$. Graphiquement : la courbe de f coupe l'axe des abscisses en x_1.

Définition — Racines

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2, alors :

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Propriété — Somme et produit des racines

Méthode — Utiliser somme et produit (Monka)

Soit $f(x) = -2x^2 + x + 1$.

1) Montrer que $x_1 = 1$ est racine de f.
$f(1) = -2 + 1 + 1 = 0$. Donc $x_1 = 1$ est bien racine.
2) Déterminer la deuxième racine.
D'après le produit : $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$.

Comme $x_1 = 1$, on a $x_2 = -\frac{1}{2}$. $\boxed{x_2 = -\frac{1}{2}}$.

2 Factorisation et signe du trinôme

1) Factorisation

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
— Si $\Delta = 0$: $\boxed{f(x) = a(x - x_0)^2}$ (carré parfait).
— Si $\Delta > 0$: $\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$ (x_1, x_2 racines).
— Si $\Delta < 0$: il n'existe pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

Théorème — Factorisation d'un trinôme

Méthode — Trinôme s'annulant en deux nombres donnés (Monka)

Déterminer une expression factorisée de la fonction polynôme f du second degré qui s'annule en -1 et 2, avec $f(3) = -2$.

Étape 1. Forme factorisée : $f(x) = a(x - (-1))(x - 2) = a(x + 1)(x - 2)$.
Étape 2. On utilise $f(3) = -2$: $a(3 + 1)(3 - 2) = 4a = -2$, donc $a = -\frac{1}{2}$.

Conclusion : $\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}(x + 1)(x - 2)}$.

Méthode — Factoriser un trinôme par la méthode du discriminant (Monka)

Factoriser $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

Étape 1. Discriminant : $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$. Donc 2 racines.
Étape 2. Racines : $x_1 = \dfrac{5-1}{4} = 1$; $x_2 = \dfrac{5+1}{4} = \dfrac{3}{2}$.

Étape 3. Factorisation : $\boxed{f(x) = 2(x-1)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)}$.

Vérification : $2(x-1)(x-\frac{3}{2}) = 2[x^2 - \frac{3}{2}x - x + \frac{3}{2}] = 2x^2 - 5x + 3$. ☒

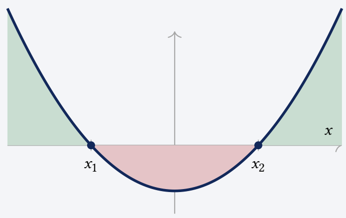
2) Signe du trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$ (signe constant).
- Si $\Delta = 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq x_0$, et $f(x_0) = 0$.
- Si $\Delta > 0$ (avec $x_1 < x_2$) : $f(x)$ est **du signe de a à l'extérieur** des racines, **du signe de $-a$ entre** les racines.

Théorème — Signe d'un trinôme

Cas $a > 0$ (sourire)

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	



Si $a < 0$: on inverse tous les signes (parabole « frimousse triste »). Règle : du signe de a à l'extérieur des racines, du signe de $-a$ entre.

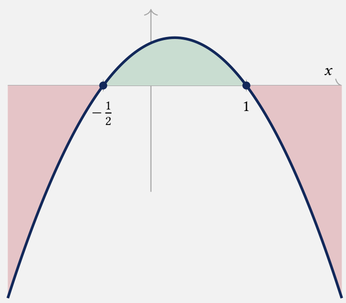
3) Inéquations du second degré

Méthode — Résoudre une inéquation du 2nd degré

Résoudre $-2x^2 + x + 1 \geq 0$.

Étape 1. On cherche les racines de $-2x^2 + x + 1$: $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$.
$x_1 = \dfrac{-1-3}{-4} = 1$; $x_2 = \dfrac{-1+3}{-4} = -\dfrac{1}{2}$.
Étape 2. Tableau de signes ($a = -2 < 0$) avec illustration :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$-2x^2 + x + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	



Étape 3. On lit l'inéquation $f(x) \geq 0$: $\mathcal{S} = \boxed{\left[-\dfrac{1}{2} ; 1\right]}$ (zéros inclus).

4) Application : Position relative de deux courbes (Monka)

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on étudie le **signe de** $h(x) = f(x) - g(x)$.
— $h(x) > 0$: $\mathscr{C}_f$ **au-dessus** de $\mathscr{C}_g$.
— $h(x) < 0$: $\mathscr{C}_f$ **en-dessous** de $\mathscr{C}_g$.
— $h(x) = 0$: courbes coupées (point d'intersection).

Méthode — Position relative de deux courbes

Méthode — Position de 2 courbes (parabole vs droite)

Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ ($f(x) = x^2 - 4x + 5$) et $\mathscr{C}_g$ ($g(x) = 2x - 3$).

$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 5 - (2x - 3) = x^2 - 6x + 8$.
Discriminant : $\Delta = 36 - 32 = 4 > 0$. Racines : $x_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$; $x_2 = \dfrac{6+2}{2} = 4$.
Signe de h ($a = 1 > 0$) :

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

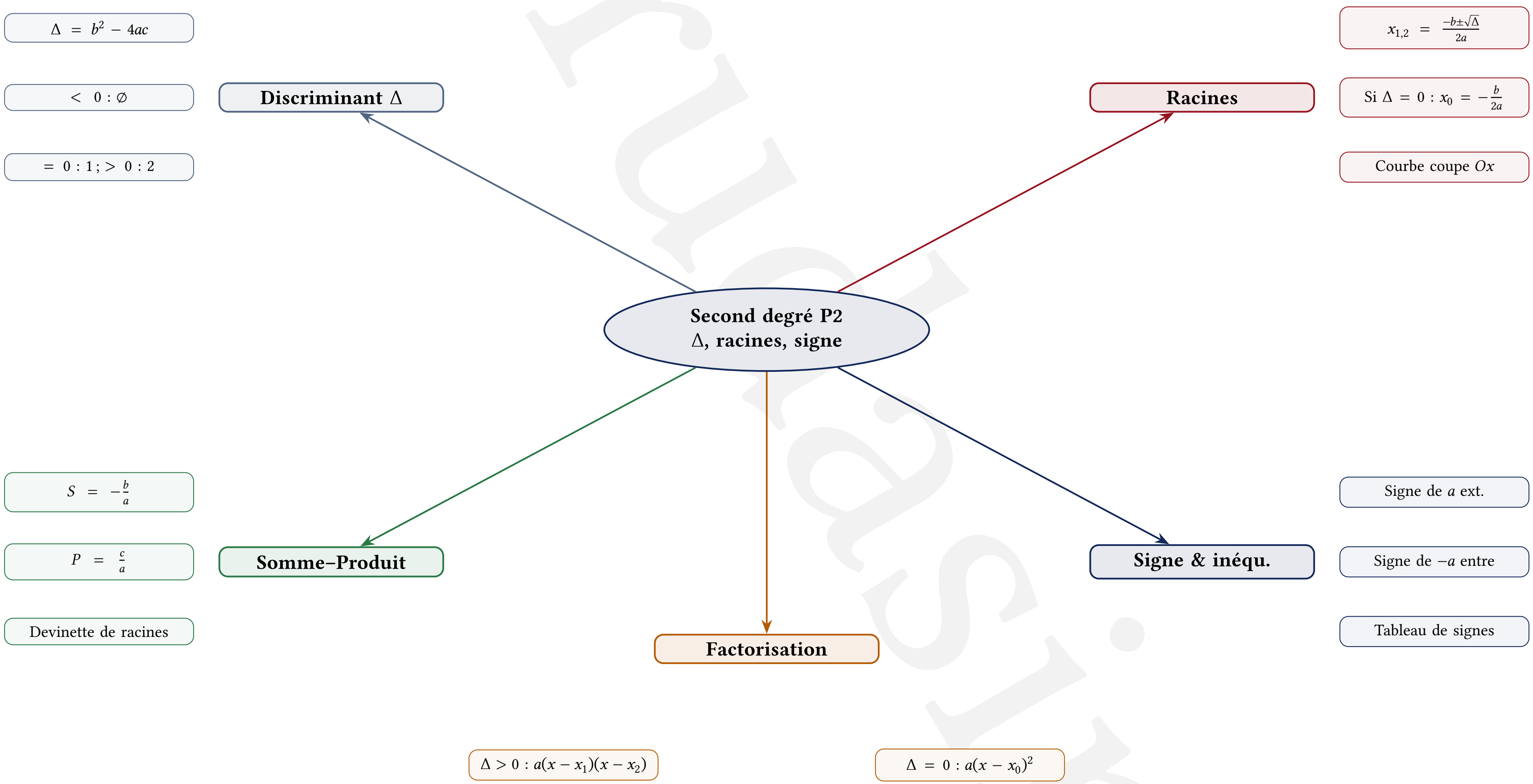
Conclusion :
— $\mathscr{C}_f$ **au-dessus** de $\mathscr{C}_g$ sur $]-\infty\,;\,2[\,\cup\,]4\,;\,+\infty[$.
— $\mathscr{C}_f$ **en-dessous** de $\mathscr{C}_g$ sur $]2\,;\,4[$.
— Les courbes se coupent en $x = 2$ et $x = 4$.

Synthèse à retenir

1. Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$; signe = nombre de racines (< 0 : 0 rac., $= 0$: 1 rac. double, > 0 : 2 rac.).
2. Racines	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.
3. Somme–Produit	$S = -\dfrac{b}{a}$, $P = \dfrac{c}{a}$.
4. Factorisation	$a(x-x_1)(x-x_2)$ si $\Delta > 0$; $a(x-x_0)^2$ si $\Delta = 0$.
5. Signe & inéquations	Du signe de a à l'extérieur des racines ; du signe de $-a$ entre.

Carte mentale — Chapitre 3 — Second degré P2

Les 5 piliers à maîtriser avant le DS.



Le second degré est désormais entièrement maîtrisé.