Second degré — Partie 2

Chapitre 3 — 1re Spé Maths

Table des matières

Positionnement dans la formation 1

Activités d'introduction 2

Résolution d'une équation du second degré 4

Factorisation et signe du trinôme 6

Synthèse à retenir 9

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Trois cas : $\Delta < 0$ (pas de solution réelle), $\Delta = 0$ (une racine double), $\Delta > 0$ (deux racines distinctes). Factorisation $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$. Signe d'un trinôme : du signe de a à l'extérieur des racines.

Démonstrations : Formules : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Somme $S = -\dfrac{b}{a}$, produit $P = \dfrac{c}{a}$. Inéquations : on résout en utilisant le tableau de signes.

Capacités : Calculer un discriminant et résoudre $ax^2 + bx + c = 0$. Factoriser un trinôme. Étudier le signe d'un trinôme. Résoudre une inéquation du second degré.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
- Forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
- Sommet $S(\alpha\,;\,\beta)$ et axe de symétrie $x = \alpha$.
- Identités remarquables : $(a \pm b)^2$, $(a+b)(a-b)$.
- Équation produit nul.
- Tableau de signes d'un produit / quotient.

Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$, le « juge » d'une équation du 2nd degré.
Racines	Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$: x_1, x_2 (selon le signe de Δ).
Factorisation	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$; $a(x - x_0)^2$ si $\Delta = 0$; impossible si $\Delta < 0$.
Somme–Produit	$S = -\dfrac{b}{a}$, $P = \dfrac{c}{a}$: utile pour deviner les racines.
Signe du trinôme	Du signe de a à l'extérieur des racines, du signe de $-a$ entre.
Inéquations	On lit le signe sur le tableau de signes.

Activités d'introduction

Activité 3 — Résoudre des équations du second degré (Magnard p. 83)

Objectif : résoudre des équations du second degré par méthodes successives. *Durée : 30 min.*

A. Équations simples

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: **a)** $x^2 = 16$ **b)** $x^2 = 8$ **c)** $x^2 = -1$ **d)** $(x-3)(x+2) = 0$.

2. Factoriser puis résoudre : **a)** $x^2 + 10x = 0$.

B. Méthode de la complétion du carré

1. Vérifier que $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

2. En déduire que $x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 1$.

3. Résoudre alors $x^2 + 4x + 3 = 0$ en utilisant cette écriture.

Activité 4 — Étudier le signe d'un trinôme (Magnard p. 83)

Objectif : étudier le signe d'un trinôme à partir de sa courbe. *Durée : 20 min.*

1. Pour $f(x) = x^2 - 4x + 3$, on observe que la courbe coupe l'axe des abscisses en $x = 1$ et $x = 3$. **a)** Résoudre $f(x) = 0$. **b)** Résoudre $f(x) > 0$. **c)** Donner le tableau de signes de f.

2. Pour $g(x) = (x-1)^2$, on observe que la courbe touche l'axe des abscisses en $x = 1$. **a)** Résoudre $g(x) = 0$. **b)** Résoudre $g(x) > 0$. **c)** Donner le tableau de signes de g.

3. Pour $h(x) = -x^2 - 1$, on observe que la courbe ne coupe pas l'axe des abscisses. **a)** Résoudre $h(x) = 0$. **b)** Résoudre $h(x) > 0$. **c)** Donner le tableau de signes de h.

4. Conjecturer une règle générale pour le signe d'un trinôme selon le nombre de racines.

1 Résolution d'une équation du second degré

Une **équation du second degré** est une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0.$$

On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$ le nombre :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Définition — Équation du second degré, discriminant

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de $ax^2 + bx + c = 0$.
— Si $\Delta < 0$: pas de solution réelle ($\mathcal{S} = \varnothing$).
— Si $\Delta = 0$: une unique solution (« racine double ») : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
— Si $\Delta > 0$: deux solutions distinctes : $\boxed{x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$.

Théorème — Résolution selon le signe de Δ

Démonstration (à connaître — Monka)

On utilise la forme canonique du Ch. 1 :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a}, \ \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Donc $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = 0$, soit :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Cas 1 : $\Delta < 0$. Le membre de gauche est positif (carré), le membre de droite est négatif. Pas de solution.
Cas 2 : $\Delta = 0$. L'équation devient $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$, soit $x = -\dfrac{b}{2a}$.
Cas 3 : $\Delta > 0$. On a $x + \dfrac{b}{2a} = \pm\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, soit $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. ■

Méthode — Résoudre une équation du second degré (Monka)

Résoudre : **a)** $2x^2 - x - 6 = 0$ **b)** $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ **c)** $x^2 + 3x + 10 = 0$.

Pour une fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$, les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ s'appellent les **racines** de f.
Une racine x_1 vérifie $f(x_1) = 0$. Graphiquement : la courbe de f coupe l'axe des abscisses en x_1.

Définition — Racines

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2, alors :

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$$

Propriété — Somme et produit des racines

Méthode — Utiliser somme et produit (Monka)

Soit $f(x) = -2x^2 + x + 1$.
1) Montrer que $x_1 = 1$ est racine de f.

2) Déterminer la deuxième racine.

2 Factorisation et signe du trinôme

1) Factorisation

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

- Si $\Delta = 0$: $\boxed{f(x) = a(x - x_0)^2}$ (carré parfait).
- Si $\Delta > 0$: $\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$ $(x_1, x_2$ racines).
- Si $\Delta < 0$: il n'existe pas de forme factorisée dans $\mathbb{R}$.

Théorème — Factorisation d'un trinôme

Méthode — Trinôme s'annulant en deux nombres donnés (Monka)

Déterminer une expression factorisée de la fonction polynôme f du second degré qui s'annule en -1 et 2, avec $f(3) = -2$.

Méthode — Factoriser un trinôme par le discriminant (Monka)

Factoriser $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$.

2) Signe du trinôme

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \in \mathbb{R}$ (signe constant).
- Si $\Delta = 0$: $f(x)$ est du signe de a pour tout $x \neq x_0$, et $f(x_0) = 0$.
- Si $\Delta > 0$ (avec $x_1 < x_2$) : $f(x)$ est **du signe de a à l'extérieur** des racines, **du signe de $-a$ entre** les racines.

Théorème — Signe d'un trinôme

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x) = ax^2+bx+c$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si $a < 0$: on inverse tous les signes (du signe de a à l'extérieur, du signe de $-a$ entre).

3) Inéquations du second degré

Méthode — Résoudre une inéquation du 2nd degré

Résoudre $-2x^2 + x + 1 \geq 0$.
Étape 1. Cherchons les racines.

Étape 2. Tableau de signes.

Étape 3. Lecture de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

4) Application : Position relative de deux courbes (Monka)

Étude du signe de $h(x) = f(x) - g(x)$:
- $h(x) > 0$: $\mathscr{C}_f$ **au-dessus**.
- $h(x) < 0$: $\mathscr{C}_f$ **en-dessous**.
- $h(x) = 0$: courbes coupées.

Méthode — Position relative

Méthode — Position de 2 courbes

Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ ($f(x) = x^2 - 4x + 5$) et $\mathscr{C}_g$ ($g(x) = 2x - 3$).

Synthèse à retenir

1. Discriminant	$\Delta = b^2 - 4ac$; signe = nombre de racines.
2. Racines	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$.
3. Somme–Produit	$S = -\dfrac{b}{a}$, $P = \dfrac{c}{a}$.
4. Factorisation	$a(x-x_1)(x-x_2)$ si $\Delta > 0$; $a(x-x_0)^2$ si $\Delta = 0$.
5. Signe & inéquations	Du signe de a à l'extérieur des racines ; du signe de $-a$ entre.

Tableau de signes Ch. 3 — à compléter

À toi de jouer : complète le tableau de signes selon les 3 cas du discriminant.

Carte mentale Ch. 3 — à compléter

À toi de jouer : recopie la carte mentale dans la grille (5 piliers : discriminant, racines, somme–produit, factorisation, signe).