

## Dérivation – Partie 1

Chapitre 2 – 1<sup>re</sup> Spé Maths

### Table des matières

Positionnement dans la formation .....	1
Activités d'introduction .....	3
Limite en zéro d'une fonction .....	5
Nombre dérivé .....	5
Tangente à une courbe .....	7
Synthèse à retenir .....	9

#### PROGRAMME BO – 1<sup>re</sup> Spé Maths

**Contenus :** Limite en zéro d'une fonction. Taux d'accroissement entre  $a$  et  $a + h$ . Nombre dérivé  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ . Tangente à la courbe au point d'abscisse  $a$  : pente  $f'(a)$ , équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ . Cas particulier de la fonction valeur absolue : non dérivable en 0.

**Démonstrations :** Si la limite du taux d'accroissement existe et est finie, on l'appelle nombre dérivé. La tangente est la position limite des sécantes lorsque  $h \rightarrow 0$ . Le coefficient directeur de la tangente est  $f'(a)$ .

**Capacités :** Calculer un taux de variation. Démontrer la dérivabilité d'une fonction en  $a$ . Lire un nombre dérivé sur un graphique. Déterminer l'équation réduite d'une tangente.

Tout le cours



#### Positionnement dans la formation

- Coefficient directeur d'une droite :  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ .
- Équation réduite d'une droite :  $y = mx + p$ .
- Lecture graphique d'images et d'antécédents.
- Identités remarquables et calcul littéral.
- Sens de variation, fonctions affines.
- Tableau de variation lu et construit.

**Limite en zéro** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$  : valeurs de  $f(x)$  aussi proches de  $L$  que voulu.**Taux d'accroissement**Entre  $a$  et  $a + h$  :  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  (pente d'une sécante).**Nombre dérivé** $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  (si la limite existe).**Tangente**Position limite des sécantes; pente  $f'(a)$ ; passe par  $A(a; f(a))$ .**Équation réduite** $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .**Lien vers Ch. 4 et 6**

Fonction dérivée, variations, optimisation.

## Activités d'introduction

### Activité 1 – Calculer un taux de variation (Magnard p. 112)

**Objectif :** calculer un taux de variation par une approche numérique et graphique. *Durée : 15 min.*

On donne ci-dessous la consommation  $f(t)$  d'une famille (en kWh) selon l'heure  $t$  (en h) sur une journée.

$t$	0	4	8	12	16	19	22	24
$f(t)$	20	10	30	25	20	50	30	0

1. Sur quel(s) intervalle(s) la consommation est-elle croissante ?
2. La croissance semble-t-elle plus rapide sur  $[4; 8]$  ou sur  $[16; 19]$  ?
3. Calculer  $\frac{f(8) - f(4)}{8 - 4}$  et  $\frac{f(19) - f(16)}{19 - 16}$ . Confirmer la réponse précédente.
4. On note  $A(4; f(4))$ ,  $B(8; f(8))$ ,  $C(16; f(16))$ ,  $D(19; f(19))$ . Donner les coefficients directeurs  $m_{(AB)}$  et  $m_{(CD)}$ .
5. Sur quel(s) intervalle(s) la consommation est-elle décroissante ?
6. Calculer  $\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0}$  et  $\frac{f(24) - f(19)}{24 - 19}$ . Que remarque-t-on ?

### Correction (prof)

1. La consommation est croissante sur  $[4; 8]$  et  $[16; 19]$ .
2. À l'œil, la croissance semble plus rapide sur  $[4; 8]$ .
3.  $\frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} = \frac{30 - 10}{4} = 5$ ;  $\frac{f(19) - f(16)}{19 - 16} = \frac{50 - 20}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,33$ . Cela confirme la réponse précédente.
4.  $m_{(AB)} = 5$  et  $m_{(CD)} = \frac{10}{3}$ .
5. La consommation est décroissante sur  $[0; 4]$  et  $[19; 24]$ .
6.  $\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{10 - 20}{4} = -\frac{5}{2}$ ;  $\frac{f(24) - f(19)}{24 - 19} = \frac{0 - 50}{5} = -10$ . Les résultats sont **négatifs**, en cohérence avec la décroissance.

## Activité 2 – Accroissement moyen, vitesse moyenne (Magnard p. 112-115)

**Objectif :** découvrir la notion d'accroissement moyen infinitésimal par une approche physique. *Durée : 30 min.*

Une voiture roule sur une portion d'autoroute. Sa position (en km) au temps  $t$  (en h) est donnée par  $f(t) = 24t^2 + 24t$ .

- Calculer  $f(2)$ .
- Calculer la vitesse moyenne entre  $t = 0$  et  $t = 2$ , c'est-à-dire  $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$ .
- Compléter le tableau :

Intervalle	[0 ; 0,5]	[0,5 ; 1]	[1 ; 1,5]	[1,5 ; 2]
Vitesse moy.	?	?	?	?

La vitesse moyenne est-elle constante sur  $[0 ; 2]$  ?

- Calculer  $\frac{f(0,51) - f(0,5)}{0,01}$  et  $\frac{f(0,501) - f(0,5)}{0,001}$ . Vers quelle valeur la vitesse moyenne entre 0,5 et « juste après 0,5 » semble-t-elle tendre ?
- Cette valeur limite s'appelle la **vitesse instantanée** en  $t = 0,5$ . Comment s'appellera ce nombre en mathématiques ?

## Correction (prof)

- $f(2) = 24 \times 4 + 24 \times 2 = 96 + 48 = 144$ . (Variante texte : 96 km après 2h.)
- Vitesse moyenne =  $\frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{144 - 0}{2} = 72$  km/h.
- Vitesses moyennes :  $[0 ; 0,5] \rightarrow 36$ ;  $[0,5 ; 1] \rightarrow 60$ ;  $[1 ; 1,5] \rightarrow 84$ ;  $[1,5 ; 2] \rightarrow 108$ . **Non**, la vitesse moyenne n'est pas constante.
- $\frac{f(0,51) - f(0,5)}{0,01} \approx 48,24$ ;  $\frac{f(0,501) - f(0,5)}{0,001} \approx 48,024$ . Les valeurs semblent tendre vers 48.
- Cette valeur limite s'appellera le **nombre dérivé** de  $f$  en 0,5, noté  $f'(0,5)$ .

## 1 Limite en zéro d'une fonction

### Exemple introductif (Monka)

Soit  $f$  définie sur  $] -\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{(2+x)^2 - 4}{x}$ .

$f(0)$  n'existe pas (division par 0). On observe le tableau :

$x$	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

$f(x)$  se rapproche de 2 lorsque  $x$  se rapproche de 0. On note :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ .

On dit que  $f$  a pour **limite**  $L$  lorsque  $x$  tend vers 0 si les valeurs de  $f(x)$  peuvent être aussi proches de  $L$  que l'on veut, pourvu que  $x$  soit suffisamment proche de 0.

On note :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$$



Définition – Limite en zéro

La limite en 0 peut aussi être infinie. Par exemple, pour  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ .

## 2 Nombre dérivé

### 1) Taux d'accroissement

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ ,  $a + h \in I$  avec  $h \neq 0$ .  
Le **taux d'accroissement** (ou taux de variation) de  $f$  entre  $a$  et  $a + h$  est :

$$T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Définition – Taux d'accroissement

Géométriquement : c'est le coefficient directeur (la **pen**te) de la droite sécante reliant les points  $A(a; f(a))$  et  $M(a+h; f(a+h))$ .

### 2) Fonction dérivable, nombre dérivé

Soit  $f$  définie sur un intervalle  $I$  contenant  $a$ .

On dit que  $f$  est **dérivable en  $a$**  s'il existe un nombre réel  $L$  tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$



Définition – Fonction dérivable,  
nombre dérivé

$L$  s'appelle alors le **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$  et se note  $f'(a)$ .

Si la limite n'est pas un nombre fini (par exemple infinie ou n'existe pas), alors  $f$  n'est **pas dérivable en**  $a$ .

*Exemple* :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}$  n'est pas un nombre (vaut  $+\infty$  à droite,  $-\infty$  à gauche).

### Méthode – Démontrer qu'une fonction est dérivable (Monka)

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ . Démontrer que  $f$  est dérivable en  $x = 2$ .

**Étape 1** : On calcule  $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$  pour  $h \neq 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - (2^2 + 2 \times 2 - 3)}{h} \\ &= \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 3 - 5}{h} \\ &= \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h. \end{aligned}$$

**Étape 2** : On passe à la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6 + 0 = 6.$$

**Conclusion** :  $f$  est dérivable en 2 et  $f'(2) = 6$ .

### 3) Cas de la fonction valeur absolue

#### Définition – Fonction valeur absolue

La fonction valeur absolue est la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x|$ .

**Exemples** :  $f(-5) = |-5| = 5$ ;  $f(4) = |4| = 4$ .

**Propriété** :  $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

#### Méthode – Non-dérivabilité en 0 de la valeur absolue (Monka)

Démontrer que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

**Calcul du taux d'accroissement en 0** :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1 & \text{si } h > 0 \\ \frac{-h}{h} = -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

**Conclusion** : la limite  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$  n'existe pas, car elle dépend du signe de  $h$  (vaut 1 à droite,  $-1$  à gauche).

Donc  $f(x) = |x|$  n'est **pas dérivable en 0**.

**Interprétation graphique** : la courbe de  $|x|$  présente un « angle » à l'origine, il n'existe pas de tangente unique en ce point.

### 3 Tangente à une courbe

#### 1) Position limite des sécantes

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$  et  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative.  
La droite sécante passant par  $A(a; f(a))$  et  $M(a + h; f(a + h))$  tend vers une position limite lorsque  $h \rightarrow 0$  : c'est la **tangente** à  $\mathcal{C}_f$  au point  $A$ .

La **pende** (coefficient directeur) de cette tangente est égale au **nombre dérivé** :

$$m_{\text{tangente}} = f'(a)$$



Propriété – Tangente, pente  $f'(a)$

#### 2) Équation réduite de la tangente

Soit  $f$  dérivable en  $a$ . La tangente  $\mathcal{T}_a$  à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $a$  a pour équation réduite :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Théorème – Équation de la tangente

#### Démonstration (à connaître)

La tangente passe par  $A(a; f(a))$  et a pour pente  $f'(a)$ . C'est donc une droite d'équation  $y = f'(a) \cdot x + p$ .

On détermine  $p$  : la droite passe par  $A$ , donc  $f(a) = f'(a) \cdot a + p$ , soit  $p = f(a) - a \cdot f'(a)$ .

On obtient :  $y = f'(a) \cdot x + f(a) - a \cdot f'(a) = f'(a)(x - a) + f(a)$ . ■

#### Méthode – Équation d'une tangente

Soit  $f(x) = x^2 + 2x - 3$ . On a vu que  $f'(2) = 6$ . De plus  $f(2) = 4 + 4 - 3 = 5$ .

L'équation de la tangente  $\mathcal{T}_2$  au point d'abscisse 2 est :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 6(x - 2) + 5 = 6x - 12 + 5 = \boxed{6x - 7}$$

**Vérification** : la droite  $y = 6x - 7$  passe bien par  $(2; 5)$  :  $6 \times 2 - 7 = 5$ . ☒

**Méthode – Lire graphiquement le nombre dérivé (Monka)**

On donne la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'une fonction  $f$  avec sa tangente  $\mathcal{T}$  au point  $A(2; 3)$ . La tangente passe aussi par le point  $B(0; -1)$ .

**Question :** Déterminer  $f(2)$  et  $f'(2)$ .

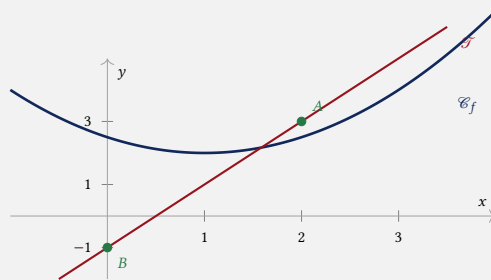
**Méthode :**

- $f(2)$  = ordonnée du point  $A$  sur la courbe :  $f(2) = 3$ .
- $f'(2)$  = pente de la tangente  $\mathcal{T}$  en  $A$ .

**Calcul de la pente :** on utilise les deux points  $A(2; 3)$  et  $B(0; -1)$ .

$$f'(2) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - (-1)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = \boxed{2}.$$

**Conclusion :**  $f(2) = 3$  et  $f'(2) = 2$ . L'équation de la tangente est  $y = 2(x - 2) + 3 = 2x - 1$ .



## Synthèse à retenir

**1. Limite en zéro**

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$  :  $f(x)$  aussi proche de  $L$  que voulu pour  $x$  proche de 0.

**2. Taux d'accroissement**

$T(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  ; pente d'une sécante.

**3. Nombre dérivé**

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} T(h)$  ; existe si la limite est finie.

**4. Tangente**

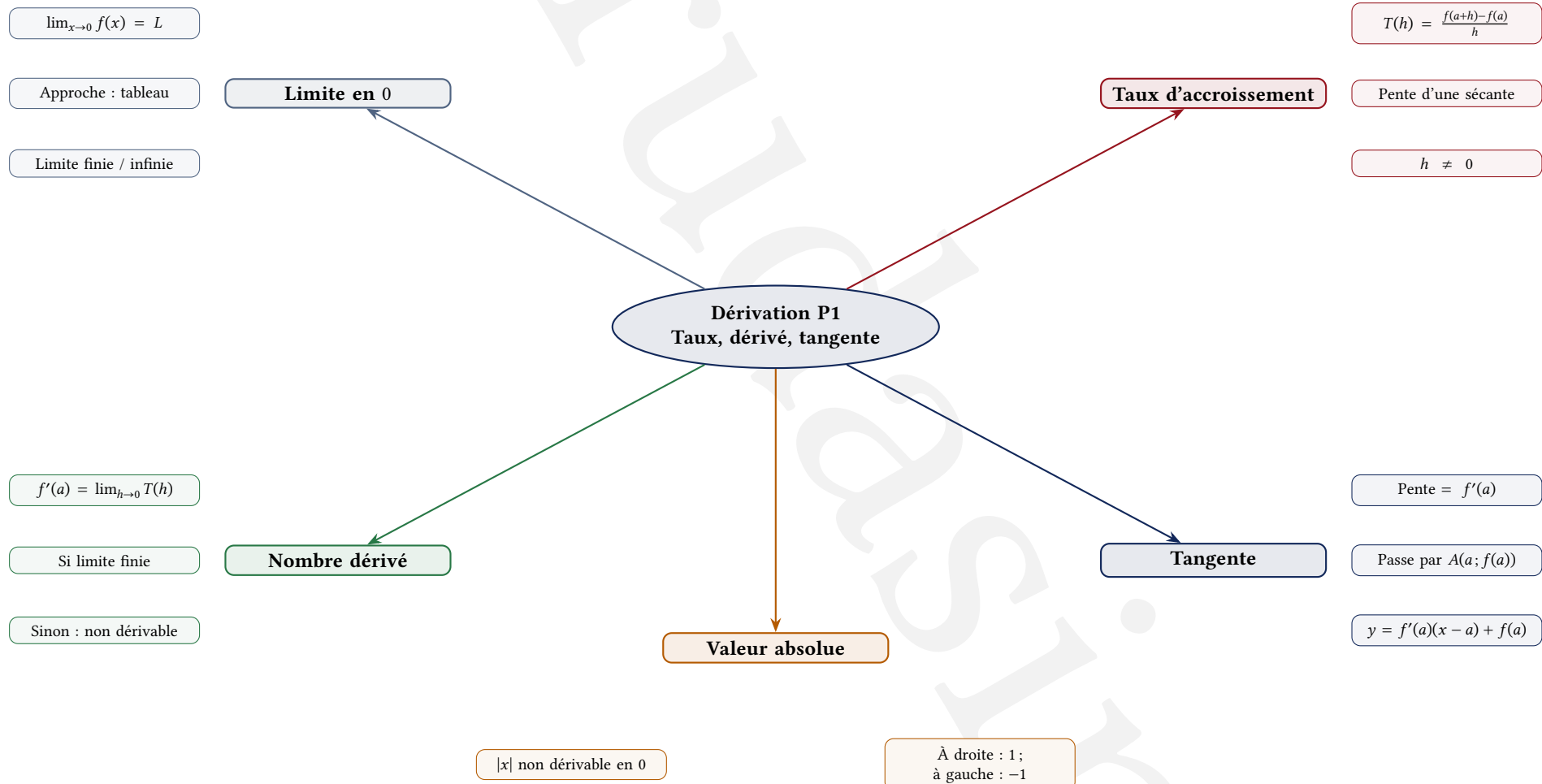
Position limite des sécantes ; pente  $f'(a)$  ; équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

**5. Cas spécial**

La fonction  $|x|$  n'est pas dérivable en 0 (angle).

# Carte mentale – Chapitre 2 – Dérivation P1

Les 5 piliers à maîtriser avant le DS.



*Au Ch. 4, on étudiera la fonction dérivée et les variations.*