Variables aléatoires

Chapitre 15 — 1re Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Variable aléatoire X : fonction qui à chaque issue de l'univers associe un nombre réel. Loi de probabilité de X : tableau des $P(X = x_i)$. Vérification : $\sum P(X = x_i) = 1$. Espérance $E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$; variance $V(X)$; écart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Démonstrations : Espérance = moyenne pondérée par les probabilités. Variance = mesure de la dispersion (formule de König : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$). Linéarité : $E(aX + b) = aE(X) + b$; $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Capacités : Définir une variable aléatoire. Établir une loi de probabilité. Calculer espérance, variance, écart-type. Utiliser la linéarité.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Probabilités, événements, $P(A \cap B)$, $P_A(B)$.
- Arbre pondéré, équiprobabilité.
- Indépendance, succession d'épreuves.
- Moyenne pondérée d'une série statistique.
- Variance et écart-type empiriques.
- Représentation par un diagramme en bâtons.

Variable aléatoire X	Fonction qui associe un nombre réel à chaque issue.
Loi de probabilité	Tableau de toutes les valeurs x_i avec leur probabilité $P(X = x_i)$.
Espérance $E(X)$	Moyenne théorique : $E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$.
Variance $V(X)$	Dispersion : $V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i) = E(X^2) - E(X)^2$ (König).
Écart-type $\sigma(X)$	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
Linéarité	$E(aX + b) = aE(X) + b$; $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Activités d'introduction

Activité 1 — Pari sur un dé

Objectif : découvrir variable aléatoire, loi et espérance. *Durée : 30 min.*

On lance un dé équilibré à 6 faces. Règle : le joueur paie 2 € pour jouer ; il reçoit le nombre d'euros correspondant au numéro tiré (de 1 à 6).
Soit G le **gain algébrique** du joueur (positif si gain net, négatif si perte).
1. Quelles sont les valeurs possibles de G ? Compléter le tableau de probabilités.
2. Calculer $G_{\text{moy}} = \sum g_i \cdot P(G = g_i)$. Cette moyenne s'appelle l'**espérance** de G.
3. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Correction (prof)

1. Si on tire k, on reçoit k €, on a payé 2 €, donc gain $G = k - 2 \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Chaque issue a probabilité $1/6$.

g_i	-1	0	1	2	3	4
$P(G = g_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. $E(G) = \dfrac{-1+0+1+2+3+4}{6} = \dfrac{9}{6} = \boxed{1{,}5}$ €.
3. $E(G) > 0$: le jeu est **favorable au joueur** (il gagne en moyenne 1,50 € par partie).

1 Variable aléatoire et loi de probabilité

Une **variable aléatoire** X est une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue de l'univers Ω d'une expérience aléatoire :

$$X\ :\ \Omega \to \mathbb{R}.$$

Les valeurs prises par X sont notées $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Définition — Variable aléatoire

Exemple — Lancer d'une pièce

On lance une pièce équilibrée 2 fois. Univers : $\Omega = \{(P;P),(P;F),(F;P),(F;F)\}$.
Soit X : « nombre de Faces obtenues ».
$X((P;P)) = 0$, $X((P;F)) = X((F;P)) = 1$, $X((F;F)) = 2$.
Donc X prend les valeurs 0, 1 ou 2.

Méthode — Calculer une probabilité avec une VA (Monka)

Dans une urne, 4 boules rouges et 6 boules vertes. On en tire 2 simultanément. Soit X le nombre de boules rouges tirées.

Valeurs possibles de X : 0, 1, 2.

$P(X=0) = \dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$; $P(X=1) = \dfrac{4\times 6}{\binom{10}{2}} = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$; $P(X=2) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$.

La **loi de probabilité** de X est le tableau qui associe à chaque valeur x_i sa probabilité $P(X = x_i)$.

Vérification : la somme de toutes les probabilités vaut 1 :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1}$$

Définition — Loi de probabilité

Méthode — Déterminer une loi (Monka)

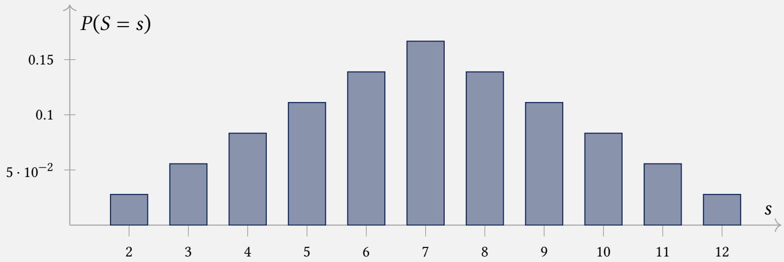
On lance deux dés équilibrés. Soit S la somme des deux dés. Donner la loi de S.

$S \in \{2, 3, 4, \dots, 12\}$. Le nombre total d'issues est 36. On compte les cas favorables :

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S=s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Vérif : $1 + 2 + 3 + \cdots + 6 + 5 + \cdots + 1 = 36$, donc $\sum P = \dfrac{36}{36} = 1$.

Représentation graphique — Diagramme en bâtons



2 Espérance, variance, écart-type

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, \dots, p_n$.
L'**espérance** de X est :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n}$$

(C'est la moyenne pondérée des valeurs.)

Définition — Espérance

La **variance** de X est :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i}$$

L'**écart-type** est :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Définition — Variance et écart-type

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$$

(Souvent plus rapide à calculer que la formule directe.)

Propriété — Formule de König

Méthode — Calculer E, V, σ (Monka)

Loi de X donnée :

x_i	-2	0	1	3
$P(X = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Espérance : $E(X) = -2 \times 0{,}1 + 0 \times 0{,}3 + 1 \times 0{,}4 + 3 \times 0{,}2 = -0{,}2 + 0 + 0{,}4 + 0{,}6 = \boxed{0{,}8}$.
Variance par König : $E(X^2) = 4 \times 0{,}1 + 0 + 1 \times 0{,}4 + 9 \times 0{,}2 = 0{,}4 + 0{,}4 + 1{,}8 = 2{,}6$.
$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2{,}6 - 0{,}64 = \boxed{1{,}96}$.
Écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{1{,}96} = \boxed{1{,}4}$.

Pour tous réels a, b et toute variable aléatoire X :

- $\boxed{E(aX+b) = a \cdot E(X) + b}$
- $\boxed{V(aX+b) = a^2 \cdot V(X)}$
- $\boxed{\sigma(aX+b) = |a| \cdot \sigma(X)}$

Propriétés — Linéarité (non exigible)

Méthode — Utiliser la linéarité (Monka)

On considère X telle que $E(X) = 10$ et $V(X) = 4$. Soit $Y = 3X - 5$. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$, $\sigma(Y)$.

$E(Y) = 3 \cdot E(X) - 5 = 3 \times 10 - 5 = \boxed{25}$.
$V(Y) = 3^2 \cdot V(X) = 9 \times 4 = \boxed{36}$.
$\sigma(Y) = |3| \cdot \sigma(X) = 3\sqrt{4} = \boxed{6}$.

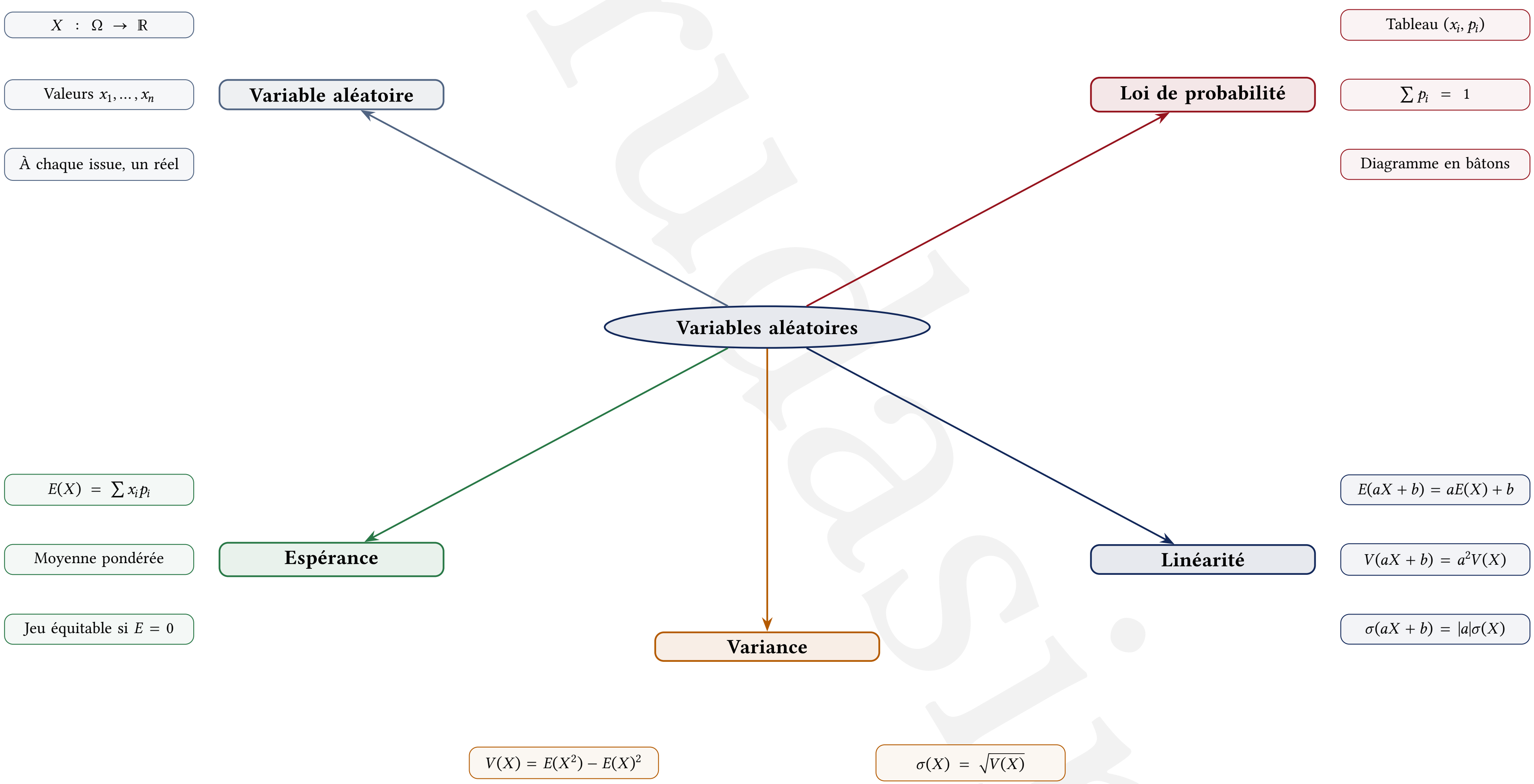
- $E(X)$: valeur « moyenne » attendue à long terme (jeu équitable si $E(X) = 0$).
- $V(X)$ ou $\sigma(X)$: mesure la « dispersion » autour de la moyenne (risque).
- Plus $\sigma(X)$ est grand, plus les valeurs s'éloignent en moyenne de $E(X)$.

Synthèse à retenir

1. Variable aléatoire	$X : \Omega \to \mathbb{R}$; valeurs $x_1, \dots, x_n$.
2. Loi de probabilité	Tableau (x_i, p_i) avec $\sum p_i = 1$.
3. Espérance	$E(X) = \sum x_i p_i$ (moyenne pondérée).
4. Variance + König	$V(X) = \sum (x_i - E(X))^2 p_i = E(X^2) - E(X)^2$; $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
5. Linéarité	$E(aX + b) = aE(X) + b$; $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Carte mentale — Ch. 15 — Variables aléatoires

Les 5 piliers à maîtriser avant le DS.



En Terminale, on étudiera la loi binomiale et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.