Géométrie repérée

Chapitre 14 — 1re Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Équation cartésienne d'une droite : à partir d'un point et d'un vecteur directeur, à partir d'un point et d'un vecteur normal. Projeté orthogonal d'un point sur une droite. Équation cartésienne d'un cercle de centre Ω et de rayon r ; reconnaissance d'un cercle à partir d'une équation développée.

Démonstrations : Vect. directeur $\vec{u}(-b;a)$ ssi équation $ax+by+c=0$. Vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ pour la droite $ax+by+c=0$. Cercle : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$. Projeté orthogonal de A sur d : intersection de d avec la perpendiculaire à d passant par A.

Capacités : Déterminer une équation cartésienne (point + directeur ou point + normal). Tracer une droite à partir de son équation. Calculer les coordonnées du projeté orthogonal. Déterminer une équation de cercle ; reconnaître un cercle développé.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
- Coordonnées de vecteurs : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Distance : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.
- Milieu : $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2} ; \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.
- Vecteurs colinéaires : $xy' - yx' = 0$.
- Produit scalaire : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ (Ch. 12).
- Orthogonalité : $\vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow xx'+yy'=0$.
- Équation $ax+by+c=0$ vue en seconde.

Vecteur normal	Vecteur orthogonal au vecteur directeur d'une droite.
Équation par vect. normal	$a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$ avec $\vec{n}(a;b)$ normal.
Projeté orthogonal	Calcul à l'intersection de la droite et de sa perpendiculaire.
Équation de cercle	$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ développable en $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.
Reconnaissance	Compléter les carrés pour identifier un cercle.

Activités d'introduction

Activité 1 — Vecteur directeur ou normal ? (synthèse 2de)

Objectif : consolider la lecture d'une équation cartésienne $ax + by + c = 0$. *Durée : 15 min.*

On rappelle qu'une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

1. Pour chaque équation, donner un vecteur directeur : **a)** $2x - 3y + 1 = 0$ **b)** $-x + 5y - 7 = 0$ **c)** $4x + y = 0$ **d)** $y = 3x - 2$ (mettre sous la forme $ax + by + c = 0$).

2. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{n}$. Que peut-on en déduire ?

3. Conclure : pour la droite $ax + by + c = 0$, quel est un vecteur *normal* ?

4. Application : déterminer un vecteur normal aux droites de la question **1**.

Activité 2 — Découvrir le projeté orthogonal

Objectif : caractériser le projeté orthogonal d'un point sur une droite. *Durée : 20 min.*

On considère la droite $d : x + 3y - 4 = 0$ et le point $A(2; 4)$.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de d et un vecteur normal $\vec{n}$.

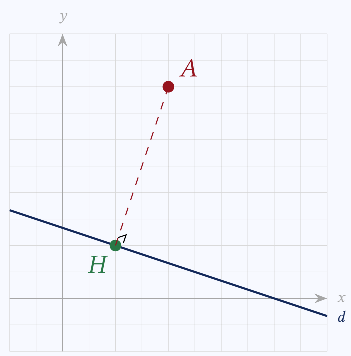
2. On note H le **projeté orthogonal** de A sur d. Caractériser H par deux conditions géométriques.

3. La droite (AH) admet-elle $\vec{n}$ comme vecteur directeur ? Justifier.

4. Donner une équation cartésienne de (AH) (*indication :* elle passe par A et $\vec{u}$ est un vecteur normal de (AH)).

5. Calculer les coordonnées de H comme intersection de d et (AH).

6. Calculer la distance AH.



Activité 3 — Reconnaître un cercle

Objectif : passer de la forme développée à la forme canonique d'un cercle. *Durée : 15 min.*

On considère l'équation $E\ :\ \ x^2 + y^2 - 8x + 2y - 21 = 0$.

1. Compléter les carrés en x et en y : écrire $x^2 - 8x = (x - \ldots)^2 - \ldots$ et $y^2 + 2y = (y + \ldots)^2 - \ldots$.

2. En déduire une équation de la forme $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.

3. S'agit-il d'un cercle ? Si oui, donner son centre Ω et son rayon r.

4. Vérification : développer $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 - 37$ et comparer à E.

Équation cartésienne d'une droite

Toute droite du plan admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

— Un vecteur **directeur** de la droite est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

— Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires ssi $xy' - yx' = 0$.

Vidéo de rappel seconde : https://youtu.be/d-rUnClmcCY

Soit d la droite passant par $A(x_A; y_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Alors :

— Une équation cartésienne de d est $\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$, soit $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$, $b = -\alpha$.

— Méthode équivalente (colinéarité) : $M(x; y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires $\Leftrightarrow (x - x_A)\beta - (y - y_A)\alpha = 0$.

Équation à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Exemple détaillé. Droite d passant par $A(3; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Équation $ax + by + c = 0$ avec $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, soit $a = 5$ et $b = 1$. Équation : $5x + y + c = 0$.

$A(3; 1)$ vérifie : $5 \times 3 + 1 + c = 0$, donc $c = -16$. *Équation :* $\boxed{5x + y - 16 = 0}$.

Méthode bis (colinéarité). $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ colinéaires : $5(x - 3) - (-1)(y - 1) = 0$, soit $5x + y - 16 = 0$. *Cohérent.*

Soient $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$ deux points distincts. La droite (BC) admet $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Équation à partir de deux points

Exemple détaillé. Droite (BC) avec $B(5; 3)$ et $C(1; -3)$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 - 5 \\ -3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$. Donc $a = -6$, $b = 4$. Équation : $-6x + 4y + c = 0$.

$B(5; 3)$: $-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$, $c = 18$. *Équation :* $\boxed{-6x + 4y + 18 = 0}$ *ou* $-3x + 2y + 9 = 0$.

Pour tracer la droite d'équation $ax + by + c = 0$, on cherche **deux points particuliers** (intersections avec les axes ou choix d'abscisses simples).

Tracer une droite à partir de son équation

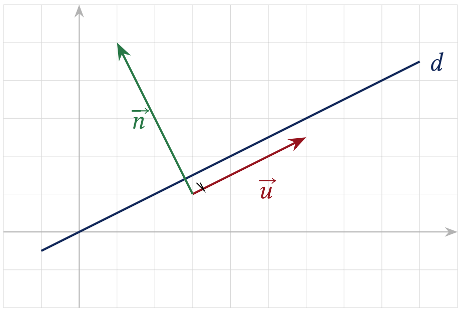
Exercice d'application. a) Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(2; -1)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

b) Donner une équation cartésienne de la droite passant par $B(0;5)$ et $C(-2;3)$.

Vecteur normal et équation cartésienne

On appelle **vecteur normal** à une droite d tout vecteur *non nul* orthogonal à un vecteur directeur de d.

Vecteur normal à une droite



— Une droite d de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$.

— **Réciproquement**, la droite d'équation $ax+by+c=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Soit $A(x_A;y_A)\in d$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ vecteur normal de d.
$M(x;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$, soit $ax+by-(ax_A+by_A)=0$, qui est de la forme $ax+by+c=0$. ■

Exemple détaillé — Droite d passant par $A(-5;4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$.

Équation : $3x-y+c=0$ avec $A(-5;4)$: $-15-4+c=0$, $c=19$. Donc $\boxed{3x-y+19=0}$.

Méthode bis (produit scalaire). $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+5\\y-4\end{pmatrix}\perp\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$: $3(x+5)+(-1)(y-4)=0$, soit $3x-y+19=0$.

Exemple — Lecture inverse. La droite d'équation $2x-3y-6=0$ admet $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ pour vecteur normal et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur. Vérification : $\vec{n}\cdot\vec{u}=2\times3+(-3)\times2=0$.

Exercice d'application. a) Équation cartésienne de la droite passant par $A(2;3)$ de vecteur normal $\vec{n}\left(1;-2\right)$.

b)*Pourladroite*4x-3y+12=0*, donnerunvecteurnormaletunvecteurdirecteur*.
c)*Lesdroites*d:2x+3y-1=0*et*d':6x-4y+5=0*sont − ellesperpendiculaires*?

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Soit d une droite et A un point du plan. Le **projeté orthogonal** de A sur d, noté H, est l'unique point de d tel que $(AH) \perp d$.

H est caractérisé par les deux conditions :

— $H \in d$;

— $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d.

Définition et caractérisation

Méthode — Calcul du projeté orthogonal.

1. Identifier $\vec{u}$ (directeur de d) et $\vec{n}$ (normal à d).
2. Écrire l'équation de la droite (AH) qui passe par A avec $\vec{u}$ comme *vecteur normal* (puisque $(AH) \perp d$ et $\vec{u}$ directeur de d).
3. Résoudre le système des deux équations d et (AH) pour trouver les coordonnées de H.

Exemple détaillé. Droite $d : x + 3y - 4 = 0$ et point $A(2;4)$. Trouver H projeté orthogonal de A sur d.

(1) d a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

(2) $(AH) \perp d$, donc $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (AH). Équation : $-3(x-2) + 1(y-4) = 0$, soit $\boxed{-3x + y + 2 = 0}$.

(3) Système :

$$\begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ -3x + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ -3(4-3y) + y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 3y \\ 10y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Donc $\boxed{H(1;1)}$. Distance $AH = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

Exercice d'application. Soit $d : 2x - y + 3 = 0$ et $A(1;6)$. **a)** Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de d.

b) Déterminer une équation de (AH).

c) Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur d.

d) Calculer la distance AH.

Équations de cercle

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(\alpha;\beta)$ et de rayon $r>0$ a pour équation :

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2.}$$

Cette forme est dite **canonique**. Développée, elle devient $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+(\alpha^2+\beta^2-r^2)=0$.

Équation cartésienne d'un cercle

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M=r \Leftrightarrow \Omega M^2=r^2$.
$\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}x-\alpha\\ y-\beta\end{pmatrix}$ donc $\Omega M^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$. ■

Exemple détaillé — Équation du cercle de centre $\Omega(4;-1)$ et de rayon $\sqrt{37}$.
Forme canonique : $(x-4)^2+(y+1)^2=37$.
Forme développée : $x^2-8x+16+y^2+2y+1=37$, soit $x^2+y^2-8x+2y-20=0$.

Une équation de la forme $x^2+y^2+\alpha' x+\beta' y+\gamma=0$ peut être un cercle, un point, ou l'ensemble vide. On **complète les carrés** :

$$(x+\tfrac{\alpha'}{2})^2-\frac{\alpha'^2}{4}+(y+\tfrac{\beta'}{2})^2-\frac{\beta'^2}{4}+\gamma=0.$$

Si $\frac{\alpha'^2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}-\gamma>0$, c'est un cercle de centre $\Omega(-\frac{\alpha'}{2};-\frac{\beta'}{2})$ et de rayon $r=\sqrt{\frac{\alpha'^2}{4}+\frac{\beta'^2}{4}-\gamma}$.

Reconnaître un cercle (forme développée)

Exemple détaillé. L'équation $x^2+y^2-6x+8y-11=0$ est-elle celle d'un cercle ?
On complète les carrés : $x^2-6x=(x-3)^2-9$, $y^2+8y=(y+4)^2-16$. Donc :

$$(x-3)^2-9+(y+4)^2-16-11=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=36.$$

C'est l'équation du **cercle de centre $\Omega(3;-4)$ et de rayon** $r=6$.
Exercice d'application. a) Donner l'équation du cercle de centre $\Omega(-2;5)$ et rayon 4.
b) L'équation $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ représente-t-elle un cercle ? Si oui, donner centre et rayon.
c) L'équation $x^2+y^2-2x+6y+15=0$ représente-t-elle un cercle ? Justifier.

Bilan

- **Équation cartésienne d'une droite :** $ax + by + c = 0$.
- **Vecteur directeur :** $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$. **Vecteur normal :** $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.
- **Équation par point + directeur :** colinéarité ou équation $ax + by + c = 0$ avec A vérifiant.
- **Équation par point + normal :** $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.
- **Projeté orthogonal** de A sur d : intersection de d avec la droite passant par A et orthogonale à d.
- **Cercle (centre + rayon) :** $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.
- **Reconnaître un cercle :** compléter les carrés.

Récapitulatif Ch. 14 — à compléter

Reproduis le tableau récapitulatif vu en cours dans la grille ci-dessous.

Carte mentale Ch. 14 — à compléter

À toi de jouer : recopie la carte mentale dans la grille.