

Fonction exponentielle

Chapitre 13 — 1^{re} Spé Maths

Table des matières

Positionnement dans la formation	1
Définition et premières propriétés	2
Propriétés algébriques	2
Étude de la fonction exponentielle	3
Fonctions $t \rightarrow \exp(kt)$	4
Exponentielle et suite géométrique	5
Synthèse graphique	6
Bilan	7

PROGRAMME BO — 1^{re} Spé Maths

Contenus : Définition de la fonction exponentielle : unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Notation $\exp(x)$ ou e^x . Propriétés : $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $(e^x)' = e^x$, strictement croissante et positive. Fonctions $t \mapsto e^{kt}$: modélisation des évolutions exponentielles.

Démonstrations : $e^0 = 1$, $e^x > 0$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$, $(e^x)^n = e^{nx}$. Pour $g(x) = e^{u(x)}$: $g'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$. Pour $f(t) = e^{kt}$: $f'(t) = k \cdot e^{kt}$; croissante si $k > 0$, décroissante si $k < 0$.

Capacités : Manipuler les exponentielles. Résoudre équations et inéquations. Dériver et étudier les variations. Modéliser une évolution exponentielle.

Tout le cours



Positionnement dans la formation

- Nombre dérivé, fonction dérivée.
- Dérivées usuelles (x^n , \sqrt{x} , $1/x$).
- Opérations sur les dérivées.
- Puissances : $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.
- Suite géométrique (Ch. 10).
- Lien dérivée – variations (Ch. 4).

Définition implicite**Notation** e^x **Propriétés algébriques****Dérivée****Étude****Modélisation**

La seule fonction qui est sa propre dérivée et vaut 1 en 0.

Le nombre $e \approx 2,718$; $e^x = \exp(x)$.

$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$: transformation très puissante.

$(e^x)' = e^x$; $(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$.

\exp strictement croissante, $\exp > 0$, courbe « en croissance ».

$t \mapsto e^{kt}$: croissance/décroissance exponentielle (radioactivité, populations..).

1 Définition et premières propriétés

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que :

$$f' = f \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée \exp .

On note aussi $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1) \approx 2,71828$.



Théorème (admis) – Définition de l'exponentielle

- $e^0 = 1$
- $(e^x)' = e^x$ (la dérivée est elle-même)
- $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (admis)



Conséquences immédiates

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur \mathbb{R} .



Propriété – Sens de variation

Soit f une fonction dérivable avec $f' = f$ et $f(0) = 1$. Posons $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$.
 Alors $g'(x) = f'(x) \cdot f(-x) + f(x) \cdot (-1) \cdot f'(-x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$.
 Donc g est constante : $g(x) = g(0) = f(0) \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$.
 Ainsi $f(x) \cdot f(-x) = 1$, d'où $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$. Ceci prouve l'unicité. ■

$(\exp(x))' = \exp(x) > 0$, donc \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} . ■

2 Propriétés algébriques

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$



Théorème fondamental – Relation fonctionnelle

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$



Corollaires

a) $e^x \cdot e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$, donc $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$. □

b) $\frac{e^x}{e^y} = e^x \cdot e^{-y} = e^{x-y}$. ■

Simplifier : a) $A = \frac{e^3 \cdot e^{-2}}{e^4}$ b) $B = (e^2)^3 \cdot e^{-5}$ c) $C = \frac{e^{2x+1}}{e^{x-3}}$.

a) $A = e^{3-2-4} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$.

b) $B = e^{2 \times 3 - 5} = e^{6-5} = e$.

c) $C = e^{(2x+1)-(x-3)} = e^{x+4}$.

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ (car exp est strictement croissante)
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$
- $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$



Propriétés – Équivalences

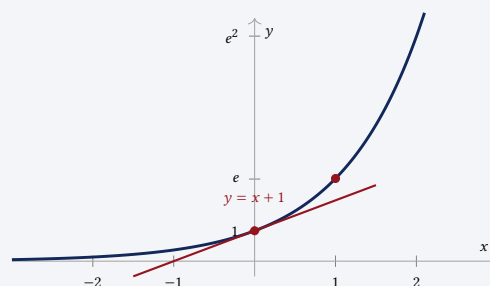
Résoudre : a) $e^{2x-1} = e^{x+3}$ b) $e^{3x} > e^{x+4}$.

a) $e^{2x-1} = e^{x+3} \Leftrightarrow 2x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow x = 4$. $\mathcal{S} = \{4\}$.

b) $e^{3x} > e^{x+4} \Leftrightarrow 3x > x + 4 \Leftrightarrow 2x > 4 \Leftrightarrow x > 2$. $\mathcal{S} =]2; +\infty[$.

3 Étude de la fonction exponentielle

x	$-\infty$	$+\infty$
$(e^x)'$	+	
e^x	0	$+\infty$



La tangente à \mathcal{C}_{\exp} en $x = 0$ a pour pente $\exp'(0) = \exp(0) = 1$ et passe par $(0; 1)$.
Équation : $y = 1 \cdot (x - 0) + 1 = \boxed{y = x + 1}$.

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors la fonction $g(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{g'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}}$$



Théorème – Dérivée de $e^{u(x)}$

Calculer la dérivée de : a) $f(x) = e^{3x+5}$ b) $g(x) = x \cdot e^x$ c) $h(x) = e^{x^2}$.

a) $u(x) = 3x + 5, u'(x) = 3 : f'(x) = 3 \cdot e^{3x+5}$.

b) Produit : $g'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1 + x)e^x$.

c) $u(x) = x^2, u'(x) = 2x : h'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$.

Étudier les variations de $f(x) = (x - 1)e^x$ sur \mathbb{R} .

Dérivée : $f'(x) = 1 \cdot e^x + (x - 1)e^x = e^x(1 + x - 1) = x \cdot e^x$.

Signe : $e^x > 0$ toujours, donc $f'(x)$ a le signe de x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

f admet un **minimum** égal à $f(0) = -1$ atteint en $x = 0$.

4 Fonctions $t \mapsto e^{kt}$

Pour $k \in \mathbb{R}$ et $f(t) = e^{kt}$:

$$\boxed{f'(t) = k \cdot e^{kt}}$$



Propriété – Dérivée de $f(t) = e^{kt}$

- Si $k > 0$: $f(t) = e^{kt}$ est strictement **croissante** sur \mathbb{R} (croissance exponentielle).
- Si $k < 0$: $f(t) = e^{kt}$ est strictement **décroissante** sur \mathbb{R} (décroissance exponentielle).
- Si $k = 0$: f est constante égale à 1.



Propriété – Sens de variation

Une masse $M_0 = 10$ g de radium se désintègre selon $M(t) = 10 \cdot e^{-0,0004t}$ (t en années).

a) Quelle masse reste-t-il après 1 000 ans ?

$$M(1000) = 10 \cdot e^{-0,4} \approx 10 \times 0,670 \approx 6,70 \text{ g.}$$

b) La fonction est-elle croissante ou décroissante ? Pourquoi ?

$k = -0,0004 < 0$ donc M est strictement décroissante (décroissance exponentielle).

5 Exponentielle et suite géométrique

Pour tout réel a et tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$e^{na} = (e^a)^n$$

La suite $u_n = e^{na}$ est donc une **suite géométrique** de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = e^a$.



Propriété – Lien exponentielle / suite géométrique

On pose $u_n = e^{0,5n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (u_n) est géométrique. Préciser sa raison.

$u_{n+1} = e^{0,5(n+1)} = e^{0,5n} \cdot e^{0,5} = e^{0,5} \cdot u_n$. Donc (u_n) est géométrique de raison $q = e^{0,5} \approx 1,649$ et de premier terme $u_0 = e^0 = 1$.

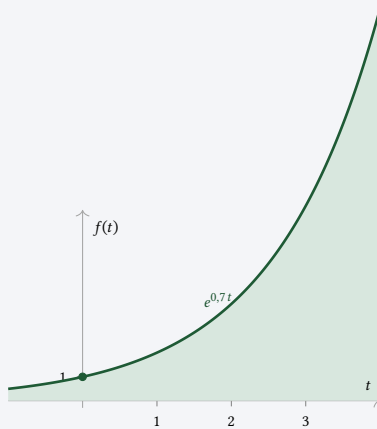
b) Calculer u_4 .

$$u_4 = e^2 \approx 7,389.$$

Synthèse graphique – Hall of Fame

Cas $k > 0$: croissance exponentielle

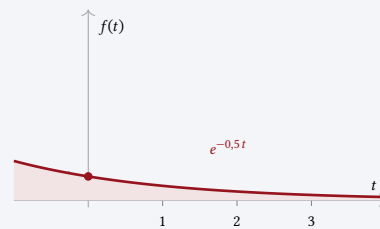
t	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	0	$+\infty$



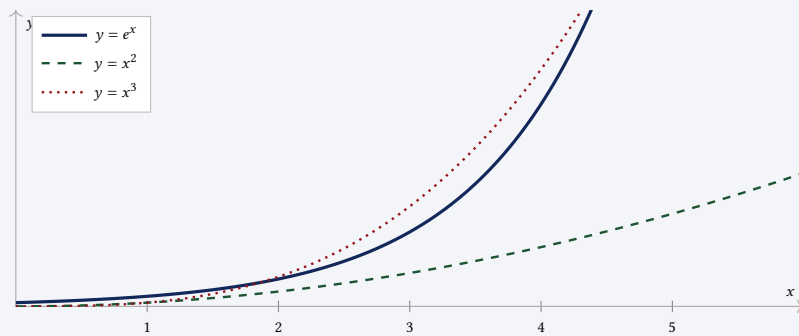
Population, capitalisation, propagation.

Cas $k < 0$: décroissance exponentielle

t	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	$+\infty$	0



Radioactivité, refroidissement, dilution.



À retenir : pour x assez grand, e^x dépasse n'importe quelle puissance de x .

Bilan

- **Définition** : \exp est l'unique fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On note $e^x = \exp(x)$ avec $e \approx 2,718$.
- **Algébrique** : $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$; $e^{-x} = 1/e^x$; $e^{x-y} = e^x/e^y$; $(e^x)^n = e^{nx}$.
- **Équivalences** : $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$; $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$.
- **Dérivée** : $(e^x)' = e^x$; $(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$.
- **Variations** : \exp strictement croissante sur \mathbb{R} , $\exp > 0$.
- **Modèle** e^{kt} : $(e^{kt})' = k \cdot e^{kt}$; croissante si $k > 0$, décroissante si $k < 0$.

Carte mentale – Chapitre 13 – Fonction exponentielle

Les 6 axes essentiels à maîtriser avant le DS.

