

## Fonction exponentielle

Chapitre 13 — 1<sup>re</sup> Spé Maths

### Table des matières

Positionnement dans la formation .....	1
Définition et premières propriétés .....	2
Propriétés algébriques .....	2
Étude de la fonction exponentielle .....	3
Fonctions $t \rightarrow \exp(kt)$ .....	4
Exponentielle et suite géométrique .....	5
Synthèse graphique .....	6
Bilan .....	7

#### PROGRAMME BO — 1<sup>re</sup> Spé Maths

**Contenus :** Unique fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ . Notation  $e^x$ .  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ,  $(e^x)' = e^x$ , strictement croissante et positive.

**Démonstrations :**  $e^0 = 1$ ,  $e^x > 0$ ,  $(e^u)' = u' \cdot e^u$ .  $f(t) = e^{kt}$  :  $k > 0$  croissance,  $k < 0$  décroissance.

**Capacités :** Manipuler  $e^x$ . Résoudre équations/inéquations. Dériver. Modéliser.

Tout le cours



#### Positionnement dans la formation

- Nombre dérivé, fonction dérivée.
- Dérivées usuelles, opérations.
- Suite géométrique (Ch. 10).
- Lien dérivée – variations.

## 1 Définition et premières propriétés

Il existe une **unique** fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .  
 Cette fonction est notée  $\exp$ , ou  $e^x$  avec  $e = \exp(1) \approx 2,71828$ .



Théorème (admis) – Définition

$e^0 = 1$ ;  $(e^x)' = e^x$ ;  $e^x > 0$  pour tout  $x$ .



Conséquences immédiates

$\exp$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}$ .



Sens de variation

$(\exp(x))' = \exp(x) > 0$ , donc strictement croissante. ■

## 2 Propriétés algébriques

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$



Théorème fondamental

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}; \quad (e^x)^n = e^{nx}$$



Corollaires

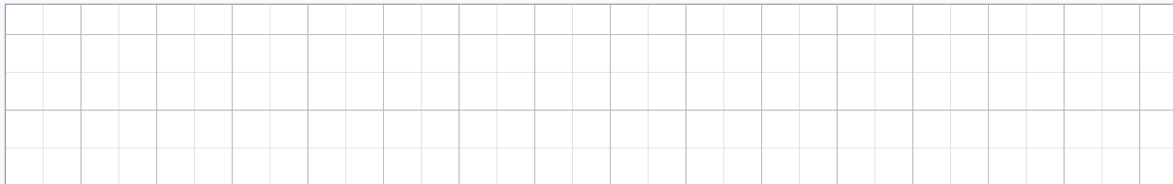
a)  $e^x \cdot e^{-x} = e^0 = 1$ , donc  $e^{-x} = 1/e^x$ . b)  $e^x/e^y = e^x \cdot e^{-y} = e^{x-y}$ . ■



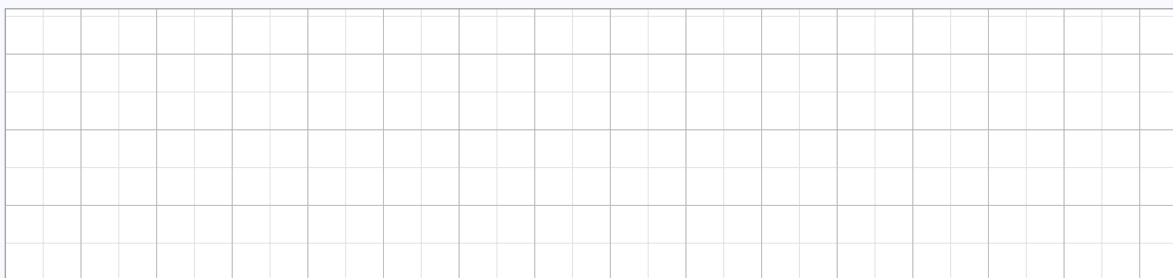
$$(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

Théorème – Dérivée de  $e^{u(x)}$ 

Dériver : a)  $f(x) = e^{3x+5}$  b)  $g(x) = x \cdot e^x$  c)  $h(x) = e^{x^2}$ .



Étudier les variations de  $f(x) = (x - 1)e^x$  sur  $\mathbb{R}$ .



#### 4 Fonctions $t \mapsto e^{kt}$

$$(e^{kt})' = k \cdot e^{kt}$$



Propriété – Dérivée

$k > 0$  : croissante.  $k < 0$  : décroissante.  $k = 0$  : constante.



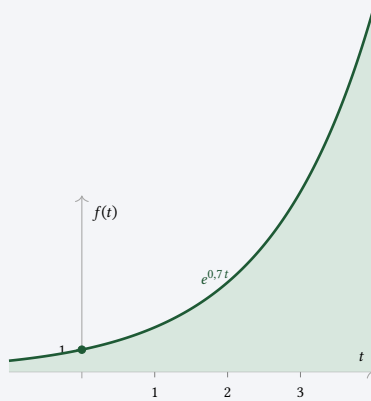
Sens de variation



### Synthèse graphique – Hall of Fame

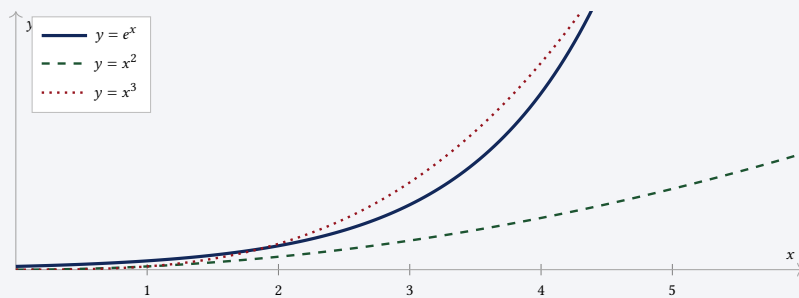
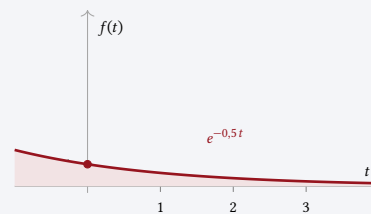
#### Cas $k > 0$ : croissance

$t$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	+	
$f(t)$	0	$+\infty$



#### Cas $k < 0$ : décroissance

$t$	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	$+\infty$	0



**À retenir :** pour  $x$  assez grand,  $e^x$  dépasse n'importe quelle puissance de  $x$ .

## Bilan

- **Définition** : exp unique fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ .  $e^x = \exp(x)$ ,  $e \approx 2,718$ .
- **Algébrique** :  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ ;  $e^{-x} = 1/e^x$ ;  $e^{x-y} = e^x/e^y$ ;  $(e^x)^n = e^{nx}$ .
- **Équivalences** :  $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ ;  $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$ .
- **Dérivée** :  $(e^x)' = e^x$ ;  $(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$ .
- **Variations** : strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ;  $e^x > 0$ .
- $e^{kt}$  :  $(e^{kt})' = k \cdot e^{kt}$ ; croissante si  $k > 0$ , décroissante si  $k < 0$ .

## Carte mentale – Chapitre 13 – Fonction exponentielle

---

*Les 6 axes essentiels à maîtriser avant le DS.*

