

Produit scalaire — Partie 2

Chapitre 12 — 1^{re} Spé Maths

Table des matières

Positionnement dans la formation	1
Activités d'introduction	3
Orthogonalité et produit scalaire	5
Produit scalaire en coordonnées	6
Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite	7
Équation cartésienne d'un cercle	8
Lignes de niveau du produit scalaire	9
Bilan	10

PROGRAMME BO — 1^{re} Spé Maths

Contenus : Orthogonalité de deux vecteurs caractérisée par $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Produit scalaire en repère orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. Vecteur normal à une droite. Équation cartésienne d'une droite. Équation d'un cercle. Lignes de niveau du produit scalaire.

Démonstrations : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Équation $ax + by + c = 0$, vecteur normal $\vec{n}(a; b)$. Cercle de centre $\Omega(\alpha; \beta)$, rayon r : $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.

Capacités : Caractériser l'orthogonalité par le produit scalaire. Calculer un produit scalaire en coordonnées. Déterminer une équation cartésienne de droite (vecteur normal donné). Équation d'un cercle (diamètre, centre + rayon). Étudier des lignes de niveau de type $MA \cdot MB = k$.

Tout le cours



Positionnement dans la formation

- Définition par le cosinus : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.
- Norme au carré : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- Symétrie, bilinéarité, identités remarquables.
- Polarisation : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.
- Al Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.
- Repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, coordonnées de vecteurs.

Orthogonalité	$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; perpendicularité de droites.
Produit scalaire en coordonnées	Dans un repère orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
Vecteur normal	Vecteur orthogonal à un vecteur directeur.
Équation cartésienne	$ax + by + c = 0$, vecteur normal $\vec{n}(a; b)$.
Cercle	$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$; cercle de diamètre $[AB]$.
Lignes de niveau	Ensembles $\{M : \vec{MA} \cdot \vec{MB} = k\}$.

Activités d'introduction

Activité 1 – Avec des coordonnées (Magnard)

Objectif : découvrir l'expression du produit scalaire en coordonnées. *Durée : 15 min.*

Pour trois points non alignés du plan, on rappelle (Ch. 9, formule de polarisation) :

$$P = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

A. Cas particulier. On considère $A(2; 3)$, $B(4; 1)$ et $C(-1; 0)$ dans un repère orthonormé. **1.** Calculer les longueurs AB , AC et BC . **2.** En déduire la valeur de P et la nature du triangle ABC .

B. Cas général. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que $P = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$.

2. On pose $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Calculer en fonction de x , x' , y , y' les normes des vecteurs \vec{u} , \vec{v} et $\vec{v} - \vec{u}$.

3. On a $P = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{u} \cdot \vec{v}$. En déduire une expression de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de x , x' , y , y' .

4. Vérifier avec les coordonnées de la partie A qu'on obtient bien la même valeur de P .

Correction (prof)

A. 1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$. $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ donc $AC = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$. $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $BC = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$.

A. 2. $P = \frac{1}{2}(8 + 18 - 26) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$: le triangle est **rectangle en A**.

B. 1. $\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$ par Chasles. Donc $BC^2 = \|\vec{v} - \vec{u}\|^2$, $AB^2 = \|\vec{u}\|^2$, $AC^2 = \|\vec{v}\|^2$, et $P = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$.

B. 2. $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$. $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$. $\vec{v} - \vec{u} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$, $\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$.

B. 3.

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - x'^2 + 2xx' - x^2 - y'^2 + 2yy' - y^2) \\ &= \frac{1}{2}(2xx' + 2yy') = xx' + yy'. \end{aligned}$$

Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

B. 4. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-3) + (-2) \times (-3) = -6 + 6 = 0$. *Cohérent avec A. 2.*

Activité 2 – Ensemble de points (Magnard, TICE)

Objectif : découvrir le cercle de diamètre $[AB]$ et les lignes de niveau. *Durée : 30 min.*

On donne deux points A et B tels que $AB = 6$. On cherche à étudier la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ quand M est un point du plan.

A. Valeurs particulières. 1. Que vaut $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ quand $M = A$ ou $M = B$? 2. Que vaut $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ quand $M = I$ (milieu de $[AB]$)? 3. Que vaut $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ quand M appartient à la droite perpendiculaire à (AB) passant par A ? Cette valeur est-elle constante?

B. Avec GeoGebra. Créer le segment $[AB]$ de longueur 6. Créer un point M libre. Calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ via `ProduitScalaire(MA, MB)`. Faire varier M et conjecturer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

C. Étude du cas $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. 1. On considère un point M sur le cercle de diamètre $[AB]$. **a)** Justifier que les médiatrices de $[MA]$ et $[MB]$ passent par I . **b)** Démontrer que le quadrilatère $MHIK$ (avec H et K milieux de $[MA]$ et $[MB]$) est un rectangle. **c)** En déduire que MAB est rectangle en M et que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. 2. Conclure pour l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

D. Étude générale $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. 1. Développer $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$ (indication : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ car I milieu). 2. Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$. 3. En déduire que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est un **cercle de centre I** (sous condition).

Correction (prof)

A. 1. Si $M = A$: $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. De même si $M = B$.

A. 2. Si $M = I$ milieu : $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ (vecteurs opposés). Donc $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IB} = -\|\overrightarrow{IB}\|^2 = -\frac{AB^2}{4} = -\frac{36}{4} = -9$.

A. 3. M sur la perpendiculaire à (AB) en A : $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$. Donc : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \|\overrightarrow{MA}\|^2 + \underbrace{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB}}_{=0} = MA^2$.

La valeur dépend de M : elle n'est pas constante. C'est MA^2 .

B. Conjecture : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ssi M est sur le **cercle de diamètre $[AB]$** .

C. 1. a) Tout point sur la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités ; or I est le milieu de $[AB]$ donc à égale distance de A et B . La médiatrice de $[MA]$ passe par I ssi $IA = IM$; comme M est sur le cercle de centre I et rayon $\frac{AB}{2} = IA$, on a bien $IM = IA$.

b) $MHIK$ a deux côtés parallèles à (AB) et perpendiculaires à (MA) et (MB) \rightarrow c'est un rectangle.

c) Le triangle MAB est inscrit dans un cercle dont $[AB]$ est le diamètre, donc MAB est rectangle en M (théorème classique). Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

C. 2. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est exactement le **cercle de diamètre $[AB]$** .

D. 1. $(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$
 $= MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = MI^2 + 0 - \frac{AB^2}{4} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

D. 2. Comme $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$, on a bien $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

D. 3. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$. Si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$, c'est le cercle de centre I et rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$. Si $= 0$, c'est juste $\{I\}$. Si < 0 , ensemble vide.

Orthogonalité et produit scalaire

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. Alors :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

En particulier, si l'un des deux vecteurs est nul, ils sont considérés orthogonaux.



Caractérisation de l'orthogonalité

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ par convention. Sinon : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = 0 \iff \cos \theta = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, soit $\vec{u} \perp \vec{v}$. ■

Exemple. Triangle ABC avec $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. La formule de polarisation donne $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(9 + 16 - 25) = 0$, donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$: le triangle est rectangle en A .

Exercice d'application. Soit $ABCD$ un rectangle. Démontrer que $\vec{AC} \perp \vec{BD}$ ssi $ABCD$ est un carré.

Correction (prof)

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ et $\vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB}$. Donc : $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{AD}) \cdot (\vec{AD} - \vec{AB}) = \vec{AD}^2 - \vec{AB}^2 = AD^2 - AB^2$.

Or $\vec{AB} \perp \vec{AD}$ donc $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ et le calcul est correct.

$\vec{AC} \perp \vec{BD} \iff AD^2 = AB^2 \iff AD = AB$: $ABCD$ est un **carré**.

Produit scalaire en coordonnées

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

En conséquence : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.



Expression analytique en repère
orthonormé

Avec la formule de polarisation : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$. En coordonnées :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2) = xx' + yy'. \blacksquare$$

Exemple détaillé. $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + (-2) \times 6 = 12 - 12 = 0.$$

Donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exercice d'application. a) Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$.

b) $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(-2; 5)$. Le triangle ABC est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ?

Correction (prof)

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + 5 \times 3 = -2 + 15 = 13$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$. $\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$.

b) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 3 \times (-3) + 4 \times 3 = -9 + 12 = 3 \neq 0$.

$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-3) \times (-6) + (-4) \times (-1) = 18 + 4 = 22 \neq 0$.

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 3 \times 6 + (-3) \times 1 = 18 - 3 = 15 \neq 0$.

Le triangle n'est pas rectangle.

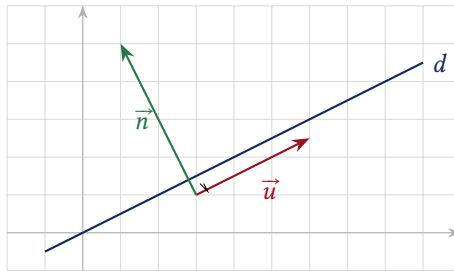
Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur *non nul* orthogonal à un vecteur directeur de d .

Si $\vec{u}(a; b)$ est un vecteur directeur de d , alors $\vec{n}(-b; a)$ ou $\vec{n}(b; -a)$ est un vecteur normal.



Vecteur normal



Soit d une droite passant par $A(x_A; y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ ($\vec{n} \neq \vec{0}$). Une équation cartésienne de d est :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0, \quad \text{soit} \quad ax + by + c = 0 \quad \text{avec} \quad c = -(ax_A + by_A).$$



Équation cartésienne d'une droite

Réciproquement, l'équation $ax + by + c = 0$ (avec $(a, b) \neq (0, 0)$) définit une droite de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.

$$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

$$\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ donc : } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

$$\text{En développant : } ax + by - ax_A - by_A = 0, \text{ soit } ax + by + c = 0 \text{ avec } c = -(ax_A + by_A). \quad \blacksquare$$

Exemple détaillé – Droite passant par $A(2; 3)$ de vecteur normal $\vec{n}(1; -2)$.

Équation : $1 \cdot (x - 2) + (-2)(y - 3) = 0$, soit $x - 2 - 2y + 6 = 0$, donc $x - 2y + 4 = 0$.

Exercice d'application. a) Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(-1; 2)$ de vecteur normal $\vec{n}(3; 5)$.

b) Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de la droite d'équation $4x - 3y + 12 = 0$.

c) Les droites $d : 2x + 3y - 1 = 0$ et $d' : 6x - 4y + 5 = 0$ sont-elles perpendiculaires ?

Correction (prof)

a) $3(x + 1) + 5(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 5y - 7 = 0$.

b) Vecteur normal $\vec{n}(4; -3)$, vecteur directeur $\vec{u}(3; 4)$ (ou $(-3; -4)$).

c) Vecteurs normaux : $\vec{n}(2; 3)$ et $\vec{n}'(6; -4)$. Calcul : $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 12 - 12 = 0$. Donc $\vec{n} \perp \vec{n}'$, et les droites sont **perpendiculaires**.

Équation cartésienne d'un cercle

Soient $\Omega(\alpha; \beta)$ et $r > 0$. Le cercle \mathcal{C} de centre Ω et de rayon r a pour équation :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$



Équation d'un cercle (centre + rayon)

$$M(x; y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2.$$

$$\overrightarrow{\Omega M} \begin{pmatrix} x - \alpha \\ y - \beta \end{pmatrix} \text{ donc } \Omega M^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2. \quad \blacksquare$$

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$



Cercle de diamètre $[AB]$

$$\begin{aligned} M \in \text{cercle diamètre } [AB] &\Leftrightarrow \text{triangle } MAB \text{ rectangle en } M \text{ (théorème inscrit dans demi-cercle)} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple – Cercle de centre $\Omega(1; -2)$ et rayon 3.

Équation : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Développée : $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9$, soit $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

Exemple – Cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(2; 1)$ et $B(4; 5)$.

Centre Ω milieu de $[AB]$: $\Omega(3; 3)$. Rayon $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{4 + 16}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$. Équation : $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Exercice d'application. a) Donner une équation du cercle de centre $\Omega(2; -1)$ et de rayon 4.

b) L'équation $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ est-elle celle d'un cercle? Si oui, donner son centre et son rayon.

c) Donner une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(-1; 3)$ et $B(5; -1)$.

Correction (prof)

a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

b) On complète les carrés : $(x - 3)^2 - 9 + (y + 4)^2 - 16 - 11 = 0$, soit $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$. C'est le cercle de centre $\Omega(3; -4)$ et de rayon 6.

c) Centre $\Omega(2; 1)$ (milieu de $[AB]$). Rayon : $r = \frac{AB}{2}$, $AB = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$, donc $r = \sqrt{13}$. Équation : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$.

Lignes de niveau du produit scalaire

Soient A, B deux points fixes, I le milieu de $[AB]$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.$$



Lignes de niveau du produit scalaire

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est :

- un **cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + AB^2/4}$** si $k + AB^2/4 > 0$,
- le point $\{I\}$ si $k + AB^2/4 = 0$ (i.e. $k = -AB^2/4$),
- l'**ensemble vide** si $k + AB^2/4 < 0$.

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \text{ et } \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}.$$

$$\text{Or } I \text{ milieu de } [AB] : \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \text{ et } \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\|\overrightarrow{IA}\|^2 = -\frac{AB^2}{4}.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}. \quad \blacksquare$$

Cas particulier $k = 0$. L'ensemble est le cercle de centre I et rayon $\frac{AB}{2}$, soit le **cercle de diamètre** $[AB]$.

Exemple détaillé – $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.

$I(0; 0)$, $AB = 4$, $AB^2/4 = 4$. Donc $MI^2 = 5 + 4 = 9$, $MI = 3$. L'ensemble est le cercle de centre O et rayon 3 : $x^2 + y^2 = 9$.

Exercice d'application. Avec $A(0; 0)$ et $B(6; 0)$, déterminer l'ensemble des points M vérifiant : a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
 b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$ c) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$ d) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -15$.

Correction (prof)

$I(3; 0)$, $AB = 6$, $AB^2/4 = 9$.

a) $MI^2 = 0 + 9 = 9$, $MI = 3$: cercle de centre I rayon 3 (cercle de diamètre $[AB]$).

b) $MI^2 = 7 + 9 = 16$, $MI = 4$: cercle de centre I rayon 4.

c) $MI^2 = -9 + 9 = 0$: un seul point $\{I\} = \{(3; 0)\}$.

d) $MI^2 = -15 + 9 = -6 < 0$: ensemble vide.

Bilan

- **Orthogonalité** : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- **Coordonnées (rep. orthonormé)** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Vecteur normal** à une droite : orthogonal à un vecteur directeur.
- **Équation cartésienne** : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ avec $\vec{n}(a; b)$ normal, soit $ax + by + c = 0$.
- **Cercle** : centre $\Omega(\alpha; \beta)$, rayon r : $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.
- **Cercle de diamètre** $[AB]$: $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.
- **Lignes de niveau** : $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

Récapitulatif – Produit scalaire P2

Notion	Formule	Exemple-type
Orthogonalité	$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	Triangle 3-4-5 : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$
Coord. repère orthonormé	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$	$\vec{u}(3; -2), \vec{v}(4; 6) : \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
Norme en coord.	$\ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\vec{u}(3; -2) : \ \vec{u}\ = \sqrt{13}$
Vecteur normal	$\vec{n} \perp$ vecteur directeur de d	Si $\vec{u}(-b; a)$ directeur, $\vec{n}(a; b)$ normal
Équation cartésienne	$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$, soit $ax + by + c = 0$	$A(2; 3), \vec{n}(1; -2) : x - 2y + 4 = 0$
Cercle (centre + rayon)	$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$	$\Omega(1; -2), r = 3 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$
Cercle de diamètre $[AB]$	$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$	$A(2; 1), B(4; 5) : (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 5$
Identité d'I milieu	$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$	Permet de réduire un calcul
Lignes de niveau	$\{M : \vec{MA} \cdot \vec{MB} = k\} : \text{cercle de centre } I \text{ ou } \emptyset$	$A(0; 0), B(6; 0), k = 7 : \text{cercle } r = 4 \text{ centre } I(3; 0)$
Perpendicularité droites	$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$	$2x + 3y - 1 = 0 \perp 6x - 4y + 5 = 0$

Carte mentale – Chapitre 12 – Produit scalaire P2

Les 6 piliers à maîtriser avant le DS.

