# Produit scalaire — Partie 2

Chapitre 12 — 1re Spé Maths

## Table des matières



PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

**Contenus :** Orthogonalité de deux vecteurs caractérisée par $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Produit scalaire en repère orthonormé : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$. Vecteur normal à une droite. Équation cartésienne d'une droite. Équation d'un cercle. Lignes de niveau du produit scalaire.

**Démonstrations :** $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$ ; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Équation $ax + by + c = 0$, vecteur normal $\vec{n}(a;b)$. Cercle de centre $\Omega(\alpha;\beta)$, rayon $r$ : $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$.

**Capacités :** Caractériser l'orthogonalité par le produit scalaire. Calculer un produit scalaire en coordonnées. Déterminer une équation cartésienne de droite (vecteur normal donné). Équation d'un cercle (diamètre, centre + rayon). Étudier des lignes de niveau de type $MA \cdot MB = k$.

Tout le cours

## Positionnement dans la formation

- Définition par le cosinus : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$.
- Norme au carré : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.
- Symétrie, bilinéarité, identités remarquables.
- Polarisation : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.
- Al Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.
- Repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, coordonnées de vecteurs.

| | |
|---|---|
| **Orthogonalité** | $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ; perpendicularité de droites. |
| **Produit scalaire en coordonnées** | Dans un repère orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. |
| **Vecteur normal** | Vecteur orthogonal à un vecteur directeur. |
| **Équation cartésienne** | $ax + by + c = 0$, vecteur normal $\vec{n}(a; b)$. |
| **Cercle** | $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ ; cercle de diamètre $[AB]$. |
| **Lignes de niveau** | Ensembles $\{M : \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k\}$. |

## Activités d'introduction

### Activité 1 — Avec des coordonnées (Magnard)

**Objectif :** découvrir l'expression du produit scalaire en coordonnées. *Durée : 15 min.*

Pour trois points non alignés du plan, on rappelle (Ch. 9, formule de polarisation) :

$$P = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

**A. Cas particulier.** On considère $A(2;3)$, $B(4;1)$ et $C(-1;0)$ dans un repère orthonormé. **1.** Calculer les longueurs $AB$, $AC$ et $BC$. **2.** En déduire la valeur de $P$ et la nature du triangle $ABC$.

**B. Cas général.** On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
**1.** Montrer que $P = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2\right)$.
**2.** On pose $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Calculer en fonction de $x$, $x'$, $y$, $y'$ les normes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v} - \vec{u}$.
**3.** On a $P = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{u} \cdot \vec{v}$. En déduire une expression de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de $x, x', y, y'$.
**4.** Vérifier avec les coordonnées de la partie A qu'on obtient bien la même valeur de $P$.

## Activité 2 — Ensemble de points (Magnard, TICE)

**Objectif :** découvrir le cercle de diamètre $[AB]$ et les lignes de niveau. *Durée : 30 min.*

On donne deux points $A$ et $B$ tels que $AB = 6$. On cherche à étudier la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ quand $M$ est un point du plan.

**A. Valeurs particulières. 1.** Que vaut $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ quand $M = A$ ou $M = B$ ? **2.** Que vaut $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ quand $M = I$ (milieu de $[AB]$) ? **3.** Que vaut $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ quand $M$ appartient à la droite perpendiculaire à $(AB)$ passant par $A$ ? Cette valeur est-elle constante ?

**B. Avec GeoGebra.** Créer le segment $[AB]$ de longueur 6. Créer un point $M$ libre. Calculer $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ via `ProduitScalaire(MA,MB)`. Faire varier $M$ et conjecturer l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

**C. Étude du cas $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. 1.** On considère un point $M$ sur le cercle de diamètre $[AB]$. **a)** Justifier que les médiatrices de $[MA]$ et $[MB]$ passent par $I$. **b)** Démontrer que le quadrilatère $MHIK$ (avec $H$ et $K$ milieux de $[MA]$ et $[MB]$) est un rectangle. **c)** En déduire que $MAB$ est rectangle en $M$ et que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$. **2.** Conclure pour l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

**D. Étude générale $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ avec $k \in \mathbb{R}$. 1.** Développer $(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$ (*indication :* $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ car $I$ milieu). **2.** Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$. **3.** En déduire que l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est un **cercle de centre** $I$ (sous condition).

## Orthogonalité et produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Alors :

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.}$$

En particulier, si l'un des deux vecteurs est nul, ils sont considérés orthogonaux.

Caractérisation de l'orthogonalité

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ par convention. Sinon : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, soit $\vec{u} \perp \vec{v}$. ■

**Exemple.** Triangle $ABC$ avec $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. La formule de polarisation donne $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}(9 + 16 - 25) = 0$, donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ : le triangle est rectangle en $A$.

**Exercice d'application.** Soit $ABCD$ un rectangle. Démontrer que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ ssi $ABCD$ est un carré.

## Produit scalaire en coordonnées

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.}$$

En conséquence : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

Expression analytique en repère orthonormé

Avec la formule de polarisation : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left( \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 \right)$. En coordonnées :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + x'^2 + y'^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2\right) = xx' + yy'.\blacksquare$$

**Exemple détaillé.** $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + (-2) \times 6 = 12 - 12 = 0.$$

Donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.

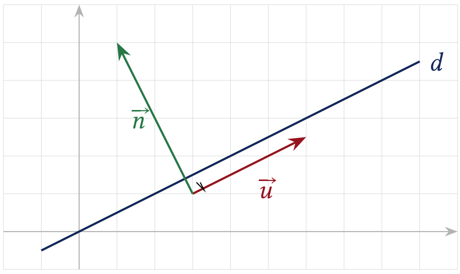
**Exercice d'application. a)** Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$.

**b)** $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(-2; 5)$. Le triangle $ABC$ est-il rectangle ? Si oui, en quel sommet ?

## Vecteur normal et équation cartésienne d'une droite

Un **vecteur normal** à une droite $d$ est un vecteur *non nul* orthogonal à un vecteur directeur de $d$.
Si $\vec{u}(a;b)$ est un vecteur directeur de $d$, alors $\vec{n}(-b;a)$ ou $\vec{n}(b;-a)$ est un vecteur normal.

Vecteur normal




Soit $d$ une droite passant par $A(x_A;y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ ($\vec{n} \neq \vec{0}$). Une équation cartésienne de $d$ est :

$$\boxed{a(x-x_A)+b(y-y_A)=0, \quad \text{soit} \quad ax+by+c=0 \text{ avec } c=-(ax_A+by_A).}$$

Réciproquement, l'équation $ax+by+c=0$ (avec $(a,b)\neq(0,0)$) définit une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$.

Équation cartésienne d'une droite

$M(x;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0.$
$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, donc : $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=a(x-x_A)+b(y-y_A)=0.$
En développant : $ax+by-ax_A-by_A=0$, soit $ax+by+c=0$ avec $c=-(ax_A+by_A)$. ■

**Exemple détaillé — Droite passant par $A(2;3)$ de vecteur normal $\vec{n}(1;-2)$.**
Équation : $1\cdot(x-2)+(-2)(y-3)=0$, soit $x-2-2y+6=0$, donc $\boxed{x-2y+4=0}$.

**Exercice d'application. a)** Donner une équation cartésienne de la droite passant par $A(-1;2)$ de vecteur normal $\vec{n}(3;5)$.
**b)** Donner un vecteur normal et un vecteur directeur de la droite d'équation $4x-3y+12=0$.
**c)** Les droites $d\ :\ 2x+3y-1=0$ et $d'\ :\ 6x-4y+5=0$ sont-elles perpendiculaires ?

## Équation cartésienne d'un cercle

Soient $\Omega(\alpha;\beta)$ et $r>0$. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega$ et de rayon $r$ a pour équation :

$$\boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2.}$$

Équation d'un cercle (centre + rayon)

$M(x;y)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M=r \Leftrightarrow \Omega M^2=r^2$.
$\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}x-\alpha\\ y-\beta\end{pmatrix}$ donc $\Omega M^2=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$. ■

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points $M$ tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0.}$$

Cercle de diamètre $[AB]$

$M\in$ cercle diamètre $[AB]$ $\Leftrightarrow$ triangle $MAB$ rectangle en $M$ (théorème inscrit dans demi-cercle) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. ■

**Exemple — Cercle de centre $\Omega(1;-2)$ et rayon 3.**
Équation : $(x-1)^2+(y+2)^2=9$. Développée : $x^2-2x+1+y^2+4y+4=9$, soit $x^2+y^2-2x+4y-4=0$.
**Exemple — Cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(2;1)$ et $B(4;5)$.**
Centre $\Omega$ milieu de $[AB]$ : $\Omega(3;3)$. Rayon $r=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{4+16}}{2}=\dfrac{\sqrt{20}}{2}=\sqrt{5}$. Équation : $(x-3)^2+(y-3)^2=5$.
**Exercice d'application. a)** Donner une équation du cercle de centre $\Omega(2;-1)$ et de rayon 4.
**b)** L'équation $x^2+y^2-6x+8y-11=0$ est-elle celle d'un cercle ? Si oui, donner son centre et son rayon.
**c)** Donner une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(-1;3)$ et $B(5;-1)$.

## Lignes de niveau du produit scalaire

Soient $A, B$ deux points fixes, $I$ le milieu de $[AB]$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}.}$$

Lignes de niveau du produit scalaire

L'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ est :
- un **cercle de centre** $I$ **et de rayon** $\sqrt{k + AB^2/4}$ si $k + AB^2/4 > 0$,
- le point $\{I\}$ si $k + AB^2/4 = 0$ (i.e. $k = -AB^2/4$),
- l'**ensemble vide** si $k + AB^2/4 < 0$.

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$.
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$.
Or $I$ milieu de $[AB]$ : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = -\left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2 = -\dfrac{AB^2}{4}$.
Donc $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$. ■

**Cas particulier** $k = 0$**.** L'ensemble est le cercle de centre $I$ et rayon $\dfrac{AB}{2}$, soit le **cercle de diamètre** $[AB]$.

**Exemple détaillé —** $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$, $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$**.**
$I(0; 0)$, $AB = 4$, $AB^2/4 = 4$. Donc $MI^2 = 5 + 4 = 9$, $MI = 3$. L'ensemble est le cercle de centre $O$ et rayon 3 : $x^2 + y^2 = 9$.

**Exercice d'application.** Avec $A(0; 0)$ et $B(6; 0)$, déterminer l'ensemble des points $M$ vérifiant : **a)** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ **b)** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$ **c)** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -9$ **d)** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -15$.

## Bilan

- **Orthogonalité :** $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- **Coordonnées (rep. orthonormé) :** $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ ; $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- **Vecteur normal** à une droite : orthogonal à un vecteur directeur.
- **Équation cartésienne :** $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ avec $\vec{n}(a; b)$ normal, soit $ax + by + c = 0$.
- **Cercle :** centre $\Omega(\alpha; \beta)$, rayon $r$ : $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.
- **Cercle de diamètre** $[AB]$ **:** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
- **Lignes de niveau :** $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \dfrac{AB^2}{4}$.

## Récapitulatif Ch. 12 — à compléter

*Reproduis le tableau récapitulatif vu en cours dans la grille ci-dessous.*

# Carte mentale Ch. 12 — à compléter

*À toi de jouer : recopie la carte mentale dans la grille.*