Fonctions trigonométriques

Chapitre 11 — 1re Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Fonctions cosinus et sinus : définitions, périodicité (2π), parité. Variations sur $[0\,;\,\pi]$ et représentations graphiques. Formules d'addition et de duplication. Équations et inéquations.

Démonstrations : $\cos, \sin : \mathbb{R} \to [-1\,;\,1]$, 2π-périodiques. $\cos$ paire, $\sin$ impaire. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$; $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$; $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

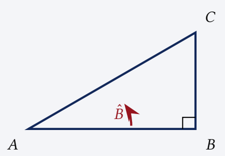
Capacités : Étudier les variations de cos et sin. Utiliser les formules d'addition/duplication. Résoudre $\cos x = \cos a$, $\sin x = \sin a$. Démonstration de $\cos(a - b)$ via produit scalaire.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Radian : $180° = \pi$ rad ; $M(\cos x, \sin x)$ sur le cercle unité.
- Mesure principale : dans $]-\pi ; \pi]$.
- Congruence : $x' \equiv x\,[2\pi] \Leftrightarrow x' = x + 2k\pi$.

Triangle rectangle ($3^{e}/2^{de}$) :



$\sin \hat{B} = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$, $\cos \hat{B} = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- Symétries cercle.
- $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

Fonctions cos, sin	Courbes, variations, symétries sur $\mathbb{R}$.
Addition	$\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$ — démo via produit scalaire.
Duplication	$\cos 2a$, $\sin 2a$, linéarisation de $\cos^2$, $\sin^2$.
Équations / inéquations	$\cos x = \cos a$, $\sin x = \sin a$; degré 2 par substitution.
TP Python	Tracé de fonctions trigonométriques et d'oscillateurs.

Activités d'introduction

Activité 1 — Du cercle aux nombres $\cos x$ et $\sin x$

Objectif : définir $\cos x$ et $\sin x$ comme coordonnées d'un point du cercle. *Durée : 15 min.*

1. Sur le cercle trigonométrique, à chaque réel x on associe le point M par enroulement (Ch. 8). On définit :

$$\cos x = \text{abscisse de } M \qquad \sin x = \text{ordonnée de } M.$$

2. Sans calcul, lire sur le cercle ci-contre les valeurs de :

a) $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$

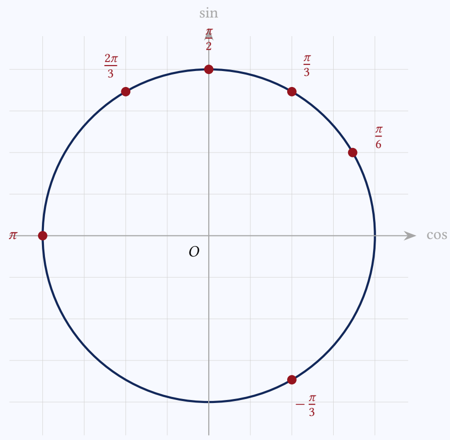
b) $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$

c) $\cos\frac{\pi}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{2}$

d) $\cos\frac{2\pi}{3}$ et $\sin\frac{2\pi}{3}$

e) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

f) $\cos\pi$ et $\sin\pi$.



3. Quel signe ont $\cos x$ et $\sin x$ selon le cadran où se trouve M ?

4. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Correction (prof)

2. a) $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$; $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

b) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

d) $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (symétrique de $\pi/3$ par rapport à (Oy)).

e) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (symétrique par rapport à (Ox)).

f) $\cos\pi = -1$; $\sin\pi = 0$.

3. 1^{er} cadran : $\cos > 0, \sin > 0$. 2^{e} : $\cos < 0, \sin > 0$. 3^{e} : $\cos < 0, \sin < 0$. 4^{e} : $\cos > 0, \sin < 0$.

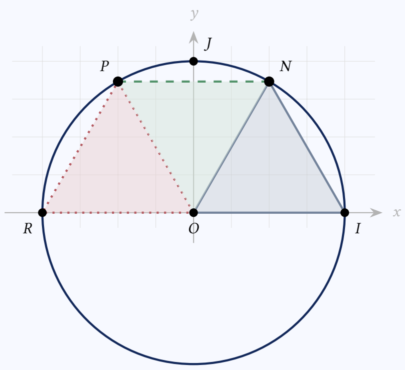
4. M sur le cercle de rayon 1 : ses coordonnées sont entre -1 et 1. Pythagore dans OHM rectangle : $OH^2 + HM^2 = OM^2 = 1$, soit $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Activité 2 — Faire le lien entre triangle et cercle trigonométrique

Objectif : faire le lien entre arc, point-image, coordonnées, cosinus et sinus. *Durée estimée : 20 min.*

1. Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, tracer le cercle trigonométrique.
2. a) Tracer le triangle OIM puis la hauteur issue de M dans OIM. Elle intercepte (OI) en H. **b)** Quelle est la nature du triangle OHM ? Justifier. **c)** Exprimer $\cos\widehat{HOM}$ et $\sin\widehat{HOM}$ en fonction des côtés.

3. Soit N le point du cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{1}{2}$ et d'ordonnée positive. **a)** Montrer que $ON = NI$. En déduire la nature du triangle OIN. **b)** Soit P le symétrique de N par rapport à (Oy) et R le point de coordonnées $(-1; 0)$. Justifier que OPR est équilatéral. **c)** Montrer que $NP = 1$. En déduire la nature du triangle ONP.
4. Quel est le périmètre du cercle ? En déduire les longueurs des arcs $\overset{\frown}{IR}$, $\overset{\frown}{IN}$ et $\overset{\frown}{IP}$.
5. Déduire des questions **2.** et **4.** les valeurs de $\sin(\pi/3)$, $\cos(\pi/3)$ et $\cos(2\pi/3)$.



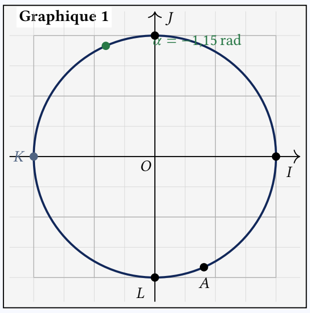
Correction (prof)

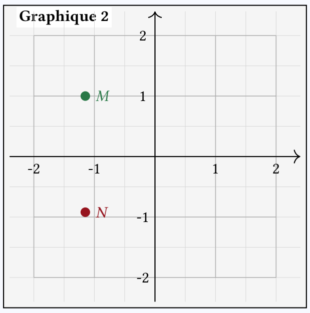
2. b) La hauteur issue de M coupe (OI) perpendiculairement en H, donc OHM est **rectangle en** H.
2. c) $\cos\widehat{HOM} = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OH}{1} = OH$; $\sin\widehat{HOM} = \dfrac{HM}{OM} = HM$.
3. a) Si $x_N = \dfrac{1}{2}$, alors N appartient à la médiatrice du segment $[OI]$, donc ONI est isocèle en N : $ON = NI$. Or $ON = OI = 1$ (rayon), donc $ON = OI = NI$, ONI est **équilatéral**.
3. b) P symétrique de N par rapport à (Oy), R symétrique de I par rapport à (Oy), O son propre symétrique. Donc le triangle OPR est le symétrique du triangle ONI par rapport à (Oy) : OPR est **équilatéral**.
3. c) Abscisse de N : $\dfrac{1}{2}$; abscisse de P : $-\dfrac{1}{2}$. Ces deux points ont même ordonnée, donc $NP = \dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$. Avec $ON = OP = 1$: le triangle ONP est **équilatéral**.
4. Périmètre du cercle $= 2\pi$. L'arc $\overset{\frown}{IR}$ vaut un demi-tour : π. L'arc $\overset{\frown}{IN}$ (secteur d'angle $\pi/3$) vaut $\dfrac{\pi}{3}$. L'arc $\overset{\frown}{IP}$ vaut $\dfrac{2\pi}{3}$.
5. Coordonnées de N : $\left(\dfrac{1}{2} ; y_N\right)$ avec $y_N > 0$ et arc $IN = \pi/3$. Par le théorème de Pythagore dans OHN (rectangle en H) : $OH^2 + HN^2 = ON^2$, soit $\dfrac{1}{4} + HN^2 = 1$, $HN^2 = \dfrac{3}{4}$, $HN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Donc $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. De plus, par symétrie, $\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$.

Activité 3 — Découvrir de nouvelles fonctions

Objectif : utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour découvrir cos et sin comme fonctions de $\mathbb{R}$ et conjecturer leurs propriétés. *Durée estimée : 15 min.*

1. Avec GeoGebra, tracer le cercle trigonométrique dans $(O; I, J)$ et placer O, I, J, $K(-1;0)$ et $L(0;-1)$.
2. Créer un curseur d'angle α allant de $-\pi$ à 3π.
3. Créer le point $A(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ en tapant `A=(cos(α),sin(α))`. Où se trouve-t-il pour $\alpha = -\pi$? Pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$? De manière générale ?
4. Créer $M(\alpha;\ \cos\alpha)$ (en vert) et $N(\alpha;\ \sin\alpha)$ (en rouge). Activer les traces ; animer α.
5. Dans un graphique secondaire, afficher les traces de M et N. Les deux courbes obtenues sont les représentations des fonctions **sinus** et **cosinus**. Ces courbes sont appelées **sinusoïdes**.
6. Quelles semblent être les propriétés géométriques de ces courbes ? On utilisera le vocabulaire : *symétrie, répétition, translation...*
7. Démontrer les propriétés géométriques observées à la question précédente.
8. Rechercher des cas de la vie quotidienne qui utilisent des fonctions trigonométriques.





*Pour $\alpha = -1{,}15$ rad : sur le **Graphique 2**, le point vert $M(\alpha;\cos\alpha)$ et le point rouge $N(\alpha;\sin\alpha)$ tracent les sinusoïdes lorsque α varie.*

Correction (prof)

3. Pour $\alpha = -\pi$, $A = (\cos(-\pi);\ \sin(-\pi)) = (-1;0) = K$. Pour $\alpha = \pi/2$, $A = (0;1) = J$. De manière générale, A appartient au cercle trigonométrique : sa position dépend seulement de l'angle α (identifié à un arc orienté).
6. Les deux courbes semblent présenter un même motif de longueur 2π. Par translation horizontale de 2π, elles sont globalement invariantes. La courbe du cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ; celle du sinus par rapport à l'origine.
7. Par enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, les points $M(\cos x;\ \sin x)$ et $M(\cos(x+2\pi);\ \sin(x+2\pi))$ sont **confondus** : $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$ (2π-périodicité). Les symétries du cercle donnent $\cos(-x) = \cos x$ (parité de cos) et $\sin(-x) = -\sin x$ (imparité de sin).
8. Électricité (courants alternatifs), sons (ondes sonores), ondes mécaniques, marées, horloges, saisons...

Fonctions sinus et cosinus

Les fonctions $\cos : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ et $\sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ sont les fonctions qui, à tout réel x, associent respectivement son cosinus et son sinus. Elles prolongent les cosinus/sinus géométriques du cercle trigonométrique à tout $\mathbb{R}$.

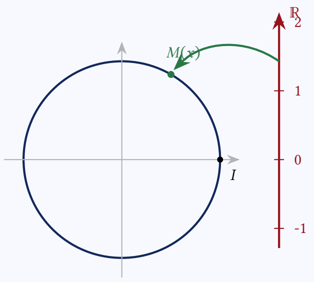
Définition

Pour tout réel x : $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$. Les fonctions cos et sin sont 2π-**périodiques**. Il suffit donc d'étudier leurs variations sur un intervalle de longueur 2π (par exemple $[-\pi; \pi]$).

Périodicité

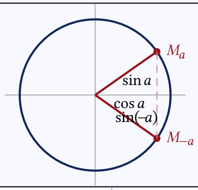
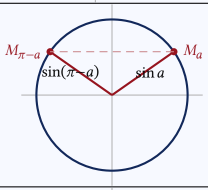
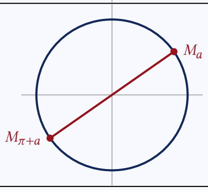
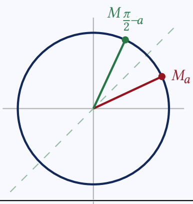
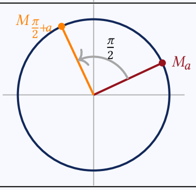
Pour tout réel x : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$. La fonction cos est **paire** (courbe symétrique par rapport à (Oy)), la fonction sin est **impaire** (courbe symétrique par rapport à O).

Parité

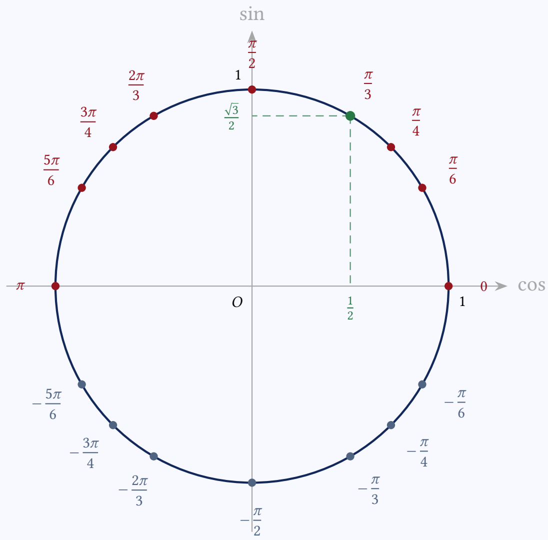


À chaque réel x, on associe le point M obtenu en enroulant la droite réelle sur le cercle trigonométrique (sens direct si $x > 0$).

• Quand x augmente de 2π, on fait un tour complet : M revient au même point.
• Donc $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$: 2π-**périodicité**.
• Le point d'angle $-x$ est le symétrique de M par rapport à (Ox) : parité.

Schéma	Formules	Symétrie
	$\cos(-a) = \cos a$ $\sin(-a) = -\sin a$	par rapport à (Ox)
	$\cos(\pi - a) = -\cos a$ $\sin(\pi - a) = \sin a$	par rapport à (Oy)
	$\cos(\pi + a) = -\cos a$ $\sin(\pi + a) = -\sin a$	par rapport à O
	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$	par rapport à la 1re bissectrice
	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$	rotation de $+\frac{\pi}{2}$

Grâce à la périodicité (2π) et à la parité, il suffit d'étudier cos ou sin sur $[0; \pi]$ et de compléter par symétrie.



Lecture : le point d'angle x a pour coordonnées $(\cos x\,;\ \sin x)$. Les points symétriques par rapport à (Ox) correspondent aux angles opposés ; ceux par rapport à (Oy) aux angles supplémentaires.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Exercice d'application. Simplifier $A(x) = \cos(-x) + \sin(x + 2\pi) - \cos(x + 2\pi)$.
Montrer que $B(x) = \sin(-x) + \cos(-x)$ n'est ni paire ni impaire en général.

Correction (prof)

$A(x)$ **:** $\cos(-x) = \cos x$ (parité), $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ (2π-périodicité), $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Donc $A(x) = \cos x + \sin x - \cos x = \sin x$.
$B(x)$ **:** $B(x) = -\sin x + \cos x$. $B(-x) = \sin x + \cos x \neq \pm B(x)$ en général (par exemple en $x = \pi/4$: $B(\pi/4) = 0$ mais $B(-\pi/4) = \sqrt{2}$). Donc B n'est ni paire ni impaire.

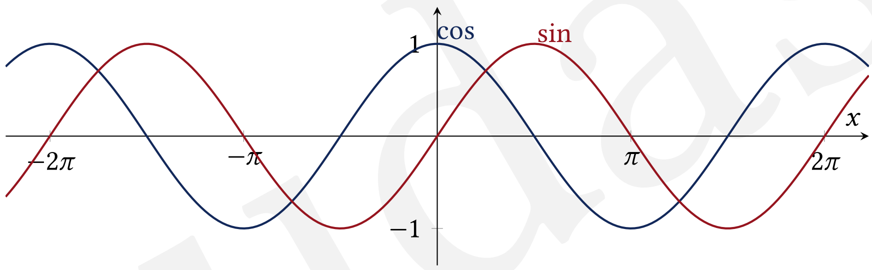
Variations et représentation graphique

- cos **décroissante** sur $[0;\pi]$, de 1 à -1.
- sin **croissante** sur $[0;\pi/2]$ (0 à 1), puis **décroissante** sur $[\pi/2;\pi]$ (1 à 0).

x	$-\pi$		0		π
$\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

cos atteint son maximum 1 en $x = 0$ et son minimum -1 en $x = \pm\pi$.
sin atteint son maximum 1 en $x = \pi/2$ et son minimum -1 en $x = -\pi/2$.



Exercice d'application. Dresser le tableau de variations de cos et sin sur $[-\pi;\pi]$. Donner les extremums et les zéros.

Correction (prof)

Par parité : cos est **croissante** sur $[-\pi;0]$ (de -1 à 1), **décroissante** sur $[0;\pi]$ (de 1 à -1).
Extremums de cos : maximum 1 en $x = 0$; minimum -1 en $x = \pm\pi$. Zéros : $x = \pm\pi/2$.
Par imparité : sin est **croissante** sur $[-\pi/2;\pi/2]$, **décroissante** sur $[-\pi;-\pi/2]$ et $[\pi/2;\pi]$.
Extremums de sin : maximum 1 en $x = \pi/2$; minimum -1 en $x = -\pi/2$. Zéros : $x \in \{-\pi;0;\pi\}$.

Formules d'addition

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b\\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b\end{aligned}}$$

On considère sur le cercle trigonométrique : $M(\cos a\,;\,\sin a)$ et $N(\cos b\,;\,\sin b)$.
L'angle orienté entre $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ vaut $b-a$.

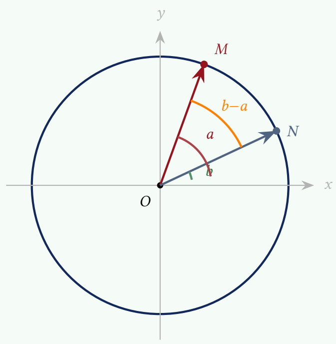
1. *Calcul analytique du produit scalaire.*

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = \cos a\cos b + \sin a \sin b.$$

2. *Calcul géométrique.* $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = 1$, donc :

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON} = 1\cdot 1\cdot\cos(b-a) = \cos(b-a).$$

3. En identifiant : $\cos(b-a) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$.
Par parité de cos : $\cos(a-b) = \cos(b-a)$. ■



Exemple 1 — $\cos(7\pi/12)$**.** $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$, donc

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

Exemple 2 — $\sin 15^\circ$**.** $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$, donc

$$\sin 15^\circ = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice d'application. Calculer **a)** $\cos(\pi/12)$ **b)** $\sin(5\pi/12)$ **c)** $\cos(\pi/3 + \pi/6)$ (retrouver une valeur connue).

Correction (prof)

a) $\cos(\pi/12) = \cos(\pi/3 - \pi/4) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

b) $\sin(5\pi/12) = \sin(\pi/4 + \pi/6) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

c) $\cos(\pi/3 + \pi/6) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0 = \cos(\pi/2)$. *(résultat conforme)*

Formules de duplication

$\boxed{\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a}$ $\boxed{\sin(2a) = 2\sin a \cos a}$

$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$.

Exercice d'application. a) Calculer $\sin(\pi/8)$. **b)** Simplifier $\cos^2 x - \sin^2 x$ et $2\sin x \cos x$. **c)** Linéariser $\sin^2(3x)$.

Correction (prof)

a) $\sin^2(\pi/8) = \dfrac{1-\cos(\pi/4)}{2} = \dfrac{1-\sqrt{2}/2}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$. Comme $\pi/8 \in [0;\pi/2]$, $\sin(\pi/8) > 0$, donc $\sin(\pi/8) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

b) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$; $2\sin x \cos x = \sin(2x)$.

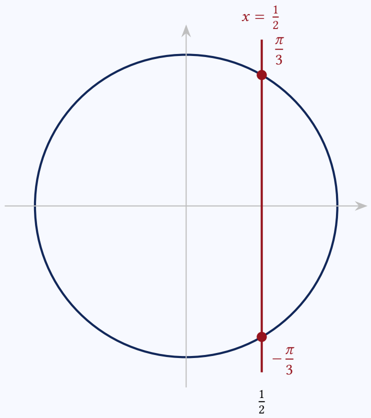
c) $\sin^2(3x) = \dfrac{1-\cos(6x)}{2}$.

Équations trigonométriques

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + 2k\pi$; $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $\pi - a + 2k\pi$.

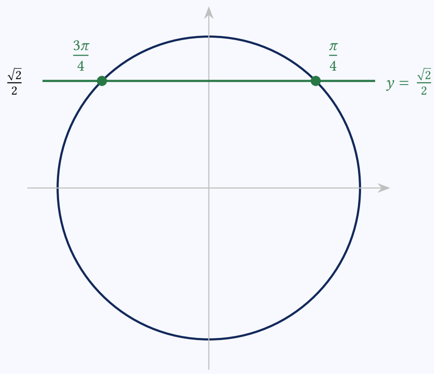
Équations fondamentales

$\cos x = \dfrac{1}{2}$



$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

Méthode — $\cos x = a$ **avec** $a \in [-1; 1]$**.** On trace la verticale $X = a$; les solutions correspondent aux deux points d'intersection avec le cercle, d'angles opposés $\pm\alpha$ où $\cos\alpha = a$.
Méthode — $\sin x = a$ **avec** $a \in [-1; 1]$**.** On trace l'horizontale $Y = a$; les solutions sont aux deux points d'intersection, d'angles supplémentaires α et $\pi - \alpha$ où $\sin\alpha = a$.

Exemple — $2\cos x + 1 = 0$ **sur** $[0; 2\pi[$**.** $2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$.
Les solutions sont donc $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0; 2\pi[$: $x \in \left\{\dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{4\pi}{3}\right\}$ (car $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{4\pi}{3}$).
Exercices d'application. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$:
a) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ **b)** $2\sin x + 1 = 0$ **c)** $\sin^2 x = 1/4$ (poser $X = \sin x$).

Correction (prof)

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{6}$, donc $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$. Dans $]-\pi; \pi]$: $x \in \left\{-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right\}$.
b) $\sin x = -\dfrac{1}{2} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$, donc $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \equiv -\dfrac{5\pi}{6}$. Dans $]-\pi; \pi]$: $x \in \left\{-\dfrac{5\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}\right\}$.
c) Poser $X = \sin x$: $X^2 = 1/4 \Leftrightarrow X = \pm\dfrac{1}{2}$. Donc $\sin x = 1/2$ donne $x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$; $\sin x = -1/2$ donne $x \in \left\{-\dfrac{\pi}{6}; -\dfrac{5\pi}{6}\right\}$. Union : $x \in \left\{\pm\dfrac{\pi}{6}; \pm\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

TP Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(0, 2*np.pi, 400)
plt.plot(x, np.cos(2*x) - np.cos(x))
plt.axhline(0, color="red"); plt.grid(True); plt.show()
```

Analyse. $\cos(2x) - \cos x = 2\cos^2 x - 1 - \cos x = (2\cos x + 1)(\cos x - 1)$.
Zéros : $\cos x = 1$ ($x = 0, 2\pi$) ou $\cos x = -1/2$ ($x = 2\pi/3, 4\pi/3$). 4 zéros observés.

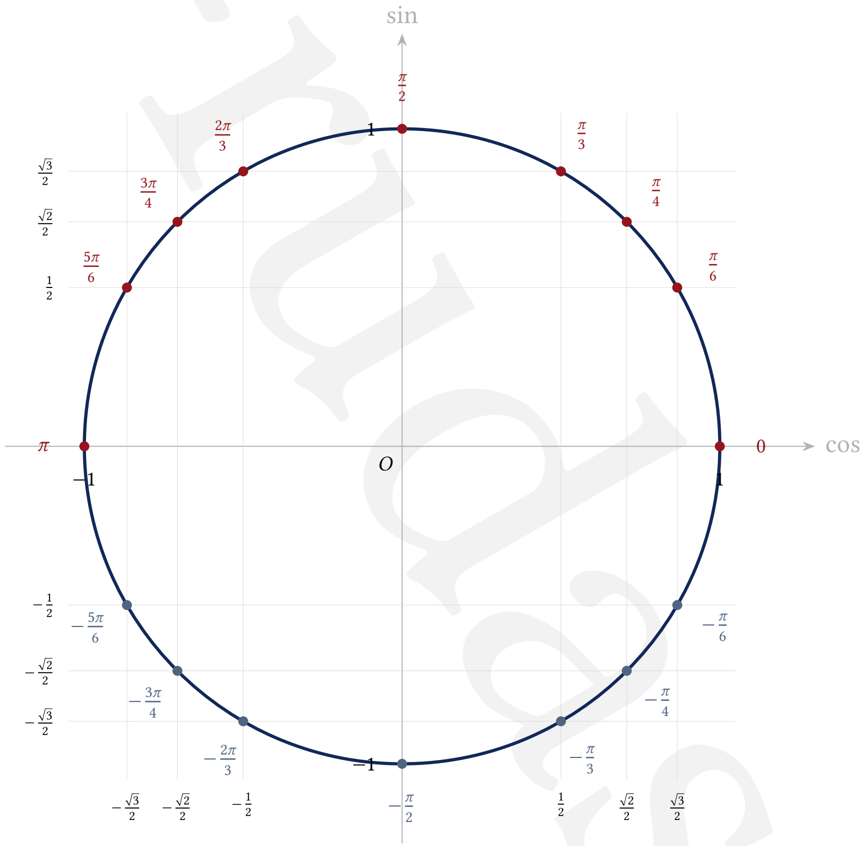
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def oscill(A, omega, phi, t_max=6):
    t = np.linspace(0, t_max, 400)
    return t, A*np.cos(omega*t + phi)
t, y1 = oscill(2, np.pi, 0)
t, y2 = oscill(2, np.pi, np.pi/4)
plt.plot(t, y1, label="phi=0")
plt.plot(t, y2, label="phi=pi/4")
plt.legend(); plt.grid(True); plt.show()
```

Amplitude $A = 2$, période $T = 2\pi/\omega = 2$ s. Le déphasage $\varphi = \pi/4$ décale la courbe vers la gauche de $T/8 = 0{,}25$ s.

Bilan

- cos, sin : $\mathbb{R} \to [-1;1]$, 2π-périodiques ; cos paire, sin impaire.
- **Variations sur** $[0;\pi]$: cos ↘ de 1 à -1 ; sin ↗ sur $[0;\pi/2]$ puis ↘ sur $[\pi/2;\pi]$.
- **Addition** : $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$; $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$.
- **Duplication** : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$; $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.
- **Linéarisation** : $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.
- **Équations** : $\cos x = \cos a \Rightarrow x = \pm a + 2k\pi$; $\sin x = \sin a \Rightarrow x = a + 2k\pi$ ou $\pi - a + 2k\pi$.

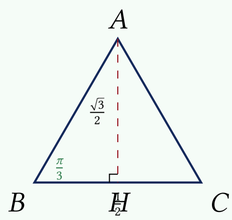
Lignes trigonométriques — valeurs exactes sur le cercle



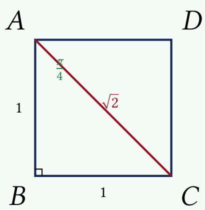
Pour chaque angle remarquable, l'abscisse est cos*, l'ordonnée est* sin.

Compléments — démonstrations géométriques

Soit ABC équilatéral de côté 1. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors H est milieu de $[BC]$: $BH = \frac{1}{2}$.
Pythagore dans ABH rectangle en H : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, donc $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Comme l'angle $\widehat{ABH} = \frac{\pi}{3}$: $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$. ■

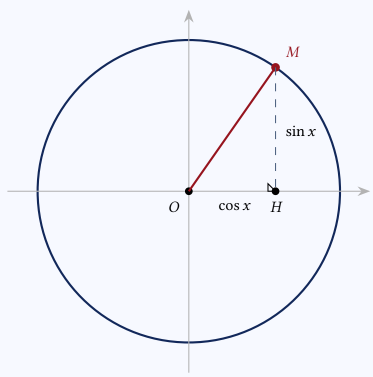


Soit $ABCD$ un carré de côté 1. La diagonale AC vérifie $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2$, donc $AC = \sqrt{2}$. Le triangle ABC est rectangle isocèle en B, et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.
Donc $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ■



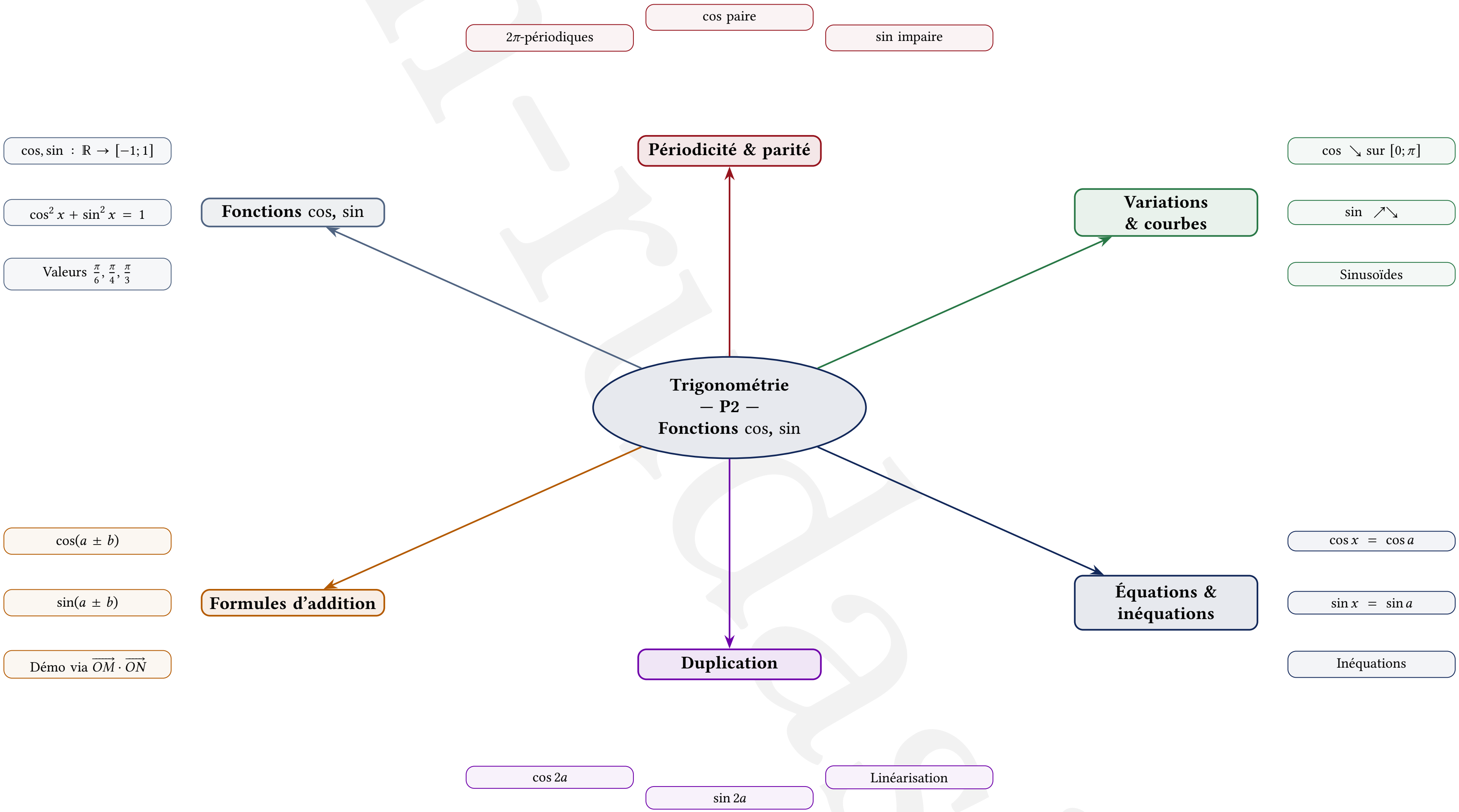
$M(\cos x ; \sin x)$ est sur le cercle unité. Si H est le projeté de M sur (Ox), alors $OH = |\cos x|$ et $HM = |\sin x|$.
Le triangle OHM est rectangle en H. Pythagore donne :

$$OH^2 + HM^2 = OM^2, \quad \text{soit} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$



Carte mentale — Chapitre 11 — Trigonométrie P2

Les 6 branches essentielles à maîtriser avant le DS.


Trigonométrie
— P2 —
Fonctions cos, sin
Périodicité & parité
2π-périodiques
cos paire
sin impaire
Fonctions cos, sin
$\cos, \sin : \mathbb{R} \to [-1;1]$
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
Valeurs $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$
Variations & courbes
cos ↘ sur $[0;\pi]$
sin ↗↘
Sinusoïdes
Formules d'addition
$\cos(a \pm b)$
$\sin(a \pm b)$
Démo via $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$
Duplication
$\cos 2a$
$\sin 2a$
Linéarisation
Équations & inéquations
$\cos x = \cos a$
$\sin x = \sin a$
Inéquations