Fonctions trigonométriques

Chapitre 11 — 1re Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Fonctions cosinus et sinus : définitions, périodicité (2π), parité. Variations sur $[0\,;\,\pi]$ et représentations graphiques. Formules d'addition et de duplication. Équations et inéquations.

Démonstrations : $\cos, \sin : \mathbb{R} \to [-1\,;\,1]$, 2π-périodiques. cos paire, sin impaire. $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$; $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$; $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

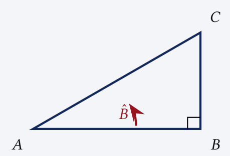
Capacités : Étudier les variations de cos et sin. Utiliser les formules d'addition/duplication. Résoudre $\cos x = \cos a$, $\sin x = \sin a$. Démonstration de $\cos(a-b)$ via produit scalaire.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Radian : $180° = \pi$ rad ; $M(\cos x, \sin x)$ sur le cercle unité.
- Mesure principale : dans $]-\pi;\pi]$.
- Congruence : $x' = x\,[2\pi] \Leftrightarrow x' = x + 2k\pi$.

Triangle rectangle (3e/2de) :



$\sin \hat{B} = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$, $\cos \hat{B} = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- Symétries cercle.
- $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

Fonctions cos, sin	Courbes, variations, symétries sur $\mathbb{R}$.
Addition	$\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$ — démo via produit scalaire.
Duplication	$\cos 2a$, $\sin 2a$, linéarisation de $\cos^2$, $\sin^2$.
Équations / inéquations	$\cos x = \cos a$, $\sin x = \sin a$; degré 2 par substitution.
TP Python	Tracé de fonctions trigonométriques et d'oscillateurs.

Activités d'introduction

Activité 1 — Du cercle aux nombres $\cos x$ et $\sin x$

Objectif : définir $\cos x$ et $\sin x$ comme coordonnées d'un point du cercle. *Durée : 15 min.*

1. Sur le cercle trigonométrique, à chaque réel x on associe le point M par enroulement (Ch. 8). On définit :

$$\cos x = \text{abscisse de } M \qquad \sin x = \text{ordonnée de } M.$$

2. Sans calcul, lire sur le cercle ci-contre les valeurs de :

a) $\cos\frac{\pi}{6}$ et $\sin\frac{\pi}{6}$

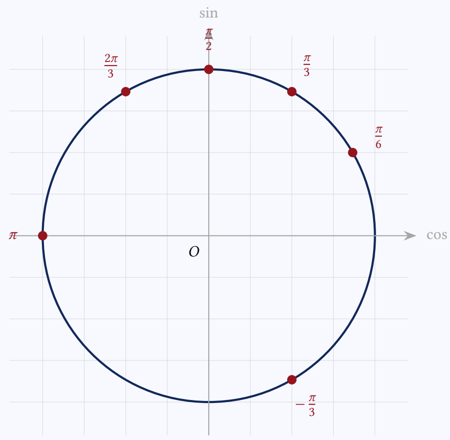
b) $\cos\frac{\pi}{3}$ et $\sin\frac{\pi}{3}$

c) $\cos\frac{\pi}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{2}$

d) $\cos\frac{2\pi}{3}$ et $\sin\frac{2\pi}{3}$

e) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

f) $\cos\pi$ et $\sin\pi$.



3. Quel signe ont $\cos x$ et $\sin x$ selon le cadran où se trouve M ?

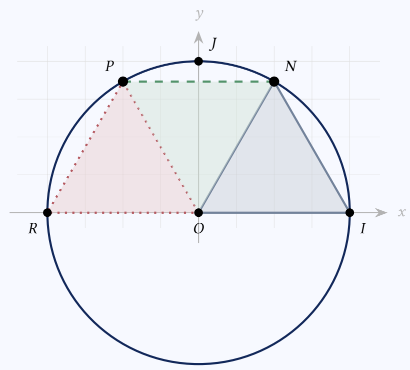
4. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \cos x \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, et $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Activité 2 — Faire le lien entre triangle et cercle trigonométrique

Objectif : faire le lien entre arc, point-image, coordonnées, cosinus et sinus. *Durée estimée : 20 min.*

1. Dans un repère orthonormé $(O; I, J)$, tracer le cercle trigonométrique.
2. a) Tracer le triangle OIM puis la hauteur issue de M dans OIM. Elle intercepte (OI) en H. **b)** Quelle est la nature du triangle OHM ? Justifier. **c)** Exprimer $\cos\widehat{HOM}$ et $\sin\widehat{HOM}$ en fonction des côtés.

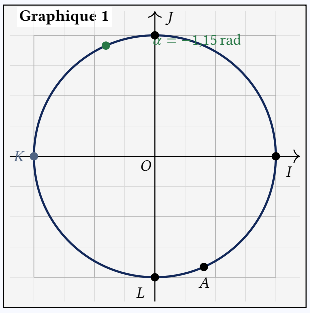
3. Soit N le point du cercle trigonométrique d'abscisse $\frac{1}{2}$ et d'ordonnée positive. **a)** Montrer que $ON = NI$. En déduire la nature du triangle OIN. **b)** Soit P le symétrique de N par rapport à (Oy) et R le point de coordonnées $(-1; 0)$. Justifier que OPR est équilatéral. **c)** Montrer que $NP = 1$. En déduire la nature du triangle ONP.
4. Quel est le périmètre du cercle ? En déduire les longueurs des arcs $\overset{\frown}{IR}$, $\overset{\frown}{IN}$ et $\overset{\frown}{IP}$.
5. Déduire des questions **2.** et **4.** les valeurs de $\sin(\pi/3)$, $\cos(\pi/3)$ et $\cos(2\pi/3)$.

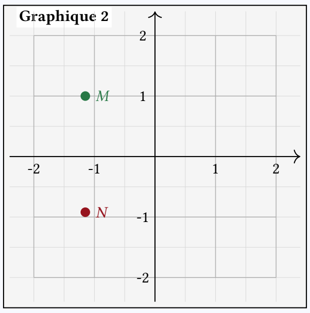


Activité 3 — Découvrir de nouvelles fonctions

Objectif : utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour découvrir cos et sin comme fonctions de $\mathbb{R}$ et conjecturer leurs propriétés. *Durée estimée : 15 min.*

1. Avec GeoGebra, tracer le cercle trigonométrique dans $(O; I, J)$ et placer O, I, J, $K(-1;0)$ et $L(0;-1)$.
2. Créer un curseur d'angle α allant de $-\pi$ à 3π.
3. Créer le point $A(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ en tapant `A=(cos(α),sin(α))`. Où se trouve-t-il pour $\alpha = -\pi$? Pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$? De manière générale ?
4. Créer $M(\alpha;\ \cos\alpha)$ (en vert) et $N(\alpha;\ \sin\alpha)$ (en rouge). Activer les traces ; animer α.
5. Dans un graphique secondaire, afficher les traces de M et N. Les deux courbes obtenues sont les représentations des fonctions **sinus** et **cosinus**. Ces courbes sont appelées **sinusoïdes**.
6. Quelles semblent être les propriétés géométriques de ces courbes ? On utilisera le vocabulaire : *symétrie, répétition, translation...*
7. Démontrer les propriétés géométriques observées à la question précédente.
8. Rechercher des cas de la vie quotidienne qui utilisent des fonctions trigonométriques.





*Pour $\alpha = -1{,}15$ rad : sur le **Graphique 2**, le point vert $M(\alpha; \cos\alpha)$ et le point rouge $N(\alpha; \sin\alpha)$ tracent les sinusoïdes lorsque α varie.*

Fonctions sinus et cosinus

Les fonctions $\cos : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ et $\sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$ sont les fonctions qui, à tout réel x, associent respectivement son cosinus et son sinus. Elles prolongent les cosinus/sinus géométriques du cercle trigonométrique à tout $\mathbb{R}$.

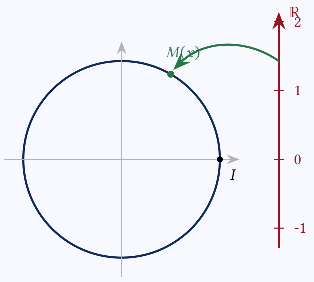
Définition

Pour tout réel x : $\cos(x+2\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2\pi) = \sin x$. Les fonctions cos et sin sont 2π-**périodiques**. Il suffit donc d'étudier leurs variations sur un intervalle de longueur 2π (par exemple $[-\pi; \pi]$).

Périodicité

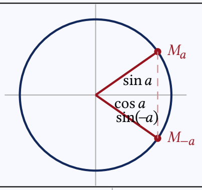
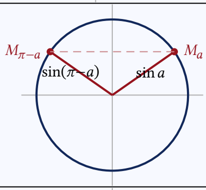
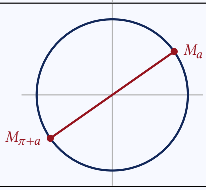
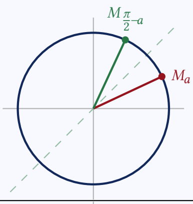
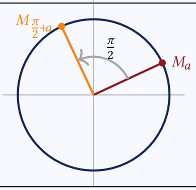
Pour tout réel x : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$. La fonction cos est **paire** (courbe symétrique par rapport à (Oy)), la fonction sin est **impaire** (courbe symétrique par rapport à O).

Parité

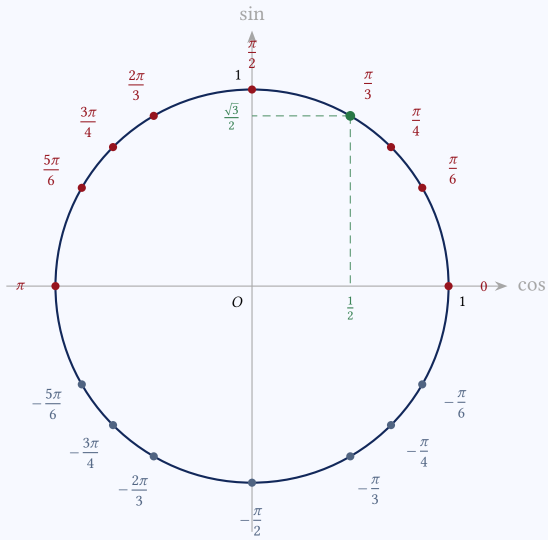


À chaque réel x, on associe le point M obtenu en enroulant la droite réelle sur le cercle trigonométrique (sens direct si $x > 0$).

• Quand x augmente de 2π, on fait un tour complet : M revient au même point.
• Donc $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$: 2π-**périodicité**.
• Le point d'angle $-x$ est le symétrique de M par rapport à (Ox) : parité.

Schéma	Formules	Symétrie
	$\cos(-a) = \cos a$ $\sin(-a) = -\sin a$	par rapport à (Ox)
	$\cos(\pi - a) = -\cos a$ $\sin(\pi - a) = \sin a$	par rapport à (Oy)
	$\cos(\pi + a) = -\cos a$ $\sin(\pi + a) = -\sin a$	par rapport à O
	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$	par rapport à la 1re bissectrice
	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$	rotation de $+\frac{\pi}{2}$

Grâce à la périodicité (2π) et à la parité, il suffit d'étudier cos ou sin sur $[0;\pi]$ et de compléter par symétrie.



Lecture : le point d'angle x a pour coordonnées $(\cos x\,;\, \sin x)$. Les points symétriques par rapport à (Ox) correspondent aux angles opposés ; ceux par rapport à (Oy) aux angles supplémentaires.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Exercice d'application. Simplifier $A(x) = \cos(-x) + \sin(x + 2\pi) - \cos(x + 2\pi)$.
Montrer que $B(x) = \sin(-x) + \cos(-x)$ n'est ni paire ni impaire en général.

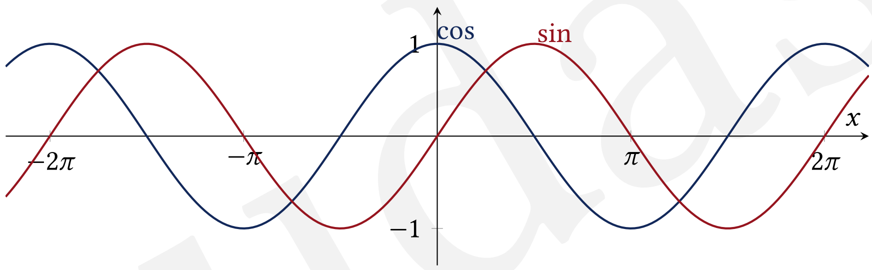
Variations et représentation graphique

- cos **décroissante** sur $[0;\pi]$, de 1 à -1.
- sin **croissante** sur $[0;\pi/2]$ (0 à 1), puis **décroissante** sur $[\pi/2;\pi]$ (1 à 0).

x	$-\pi$		0		π
$\cos x$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

cos atteint son maximum 1 en $x = 0$ et son minimum -1 en $x = \pm\pi$.
sin atteint son maximum 1 en $x = \pi/2$ et son minimum -1 en $x = -\pi/2$.



Exercice d'application. Dresser le tableau de variations de cos et sin sur $[-\pi;\pi]$. Donner les extremums et les zéros.

Formules d'addition

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b\\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b\end{aligned}}$$

On considère sur le cercle trigonométrique : $M(\cos a\,;\,\sin a)$ et $N(\cos b\,;\,\sin b)$.
L'angle orienté entre $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ vaut $b - a$.

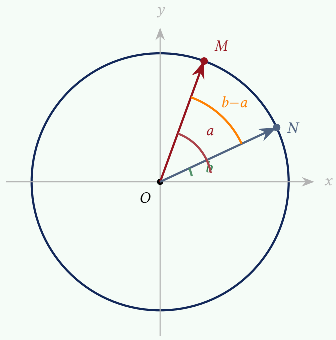
1. *Calcul analytique du produit scalaire.*

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

2. *Calcul géométrique.* $\|\overrightarrow{OM}\| = \|\overrightarrow{ON}\| = 1$, donc :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(b - a) = \cos(b - a).$$

3. En identifiant : $\cos(b - a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
Par parité de cos : $\cos(a - b) = \cos(b - a)$. ■



Exemple 1 — $\cos(7\pi/12)$. $\dfrac{7\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$, donc

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

Exemple 2 — $\sin 15°$. $15° = 45° - 30° = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$, donc

$$\sin 15° = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice d'application. Calculer **a)** $\cos(\pi/12)$ **b)** $\sin(5\pi/12)$ **c)** $\cos(\pi/3 + \pi/6)$ (retrouver une valeur connue).

Formules de duplication

$\boxed{\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a}$ $\boxed{\sin(2a) = 2\sin a \cos a}$

$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$.

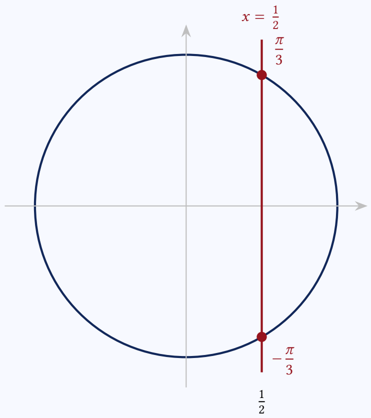
Exercice d'application. a) Calculer $\sin(\pi/8)$. **b)** Simplifier $\cos^2 x - \sin^2 x$ et $2\sin x \cos x$. **c)** Linéariser $\sin^2(3x)$.

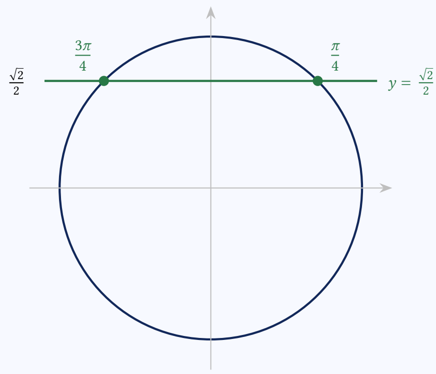
Équations trigonométriques

$\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + 2k\pi$; $\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $\pi - a + 2k\pi$.

Équations fondamentales

$\cos x = \dfrac{1}{2}$ $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$





$x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$.

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Méthode — $\cos x = a$ **avec** $a \in [-1; 1]$. On trace la verticale $X = a$; les solutions correspondent aux deux points d'intersection avec le cercle, d'angles opposés $\pm\alpha$ où $\cos\alpha = a$.
Méthode — $\sin x = a$ **avec** $a \in [-1; 1]$. On trace l'horizontale $Y = a$; les solutions sont aux deux points d'intersection, d'angles supplémentaires α et $\pi - \alpha$ où $\sin\alpha = a$.

Exemple — $2\cos x + 1 = 0$ **sur** $[0; 2\pi[$. $2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{2\pi}{3}$.
Les solutions sont donc $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Dans $[0; 2\pi[$: $x \in \left\{\dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{4\pi}{3}\right\}$ (car $-\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{4\pi}{3}$).
Exercices d'application. Résoudre dans $]-\pi; \pi]$:
a) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ **b)** $2\sin x + 1 = 0$ **c)** $\sin^2 x = 1/4$ (poser $X = \sin x$).

TP Python

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(0, 2*np.pi, 400)
plt.plot(x, np.cos(2*x) - np.cos(x))
plt.axhline(0, color="red"); plt.grid(True); plt.show()
```

Analyse. $\cos(2x) - \cos x = 2\cos^2 x - 1 - \cos x = (2\cos x + 1)(\cos x - 1)$.
Zéros : $\cos x = 1$ ($x = 0, 2\pi$) ou $\cos x = -1/2$ ($x = 2\pi/3, 4\pi/3$). 4 zéros observés.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def oscill(A, omega, phi, t_max=6):
    t = np.linspace(0, t_max, 400)
    return t, A*np.cos(omega*t + phi)
t, y1 = oscill(2, np.pi, 0)
t, y2 = oscill(2, np.pi, np.pi/4)
plt.plot(t, y1, label="phi=0")
plt.plot(t, y2, label="phi=pi/4")
plt.legend(); plt.grid(True); plt.show()
```

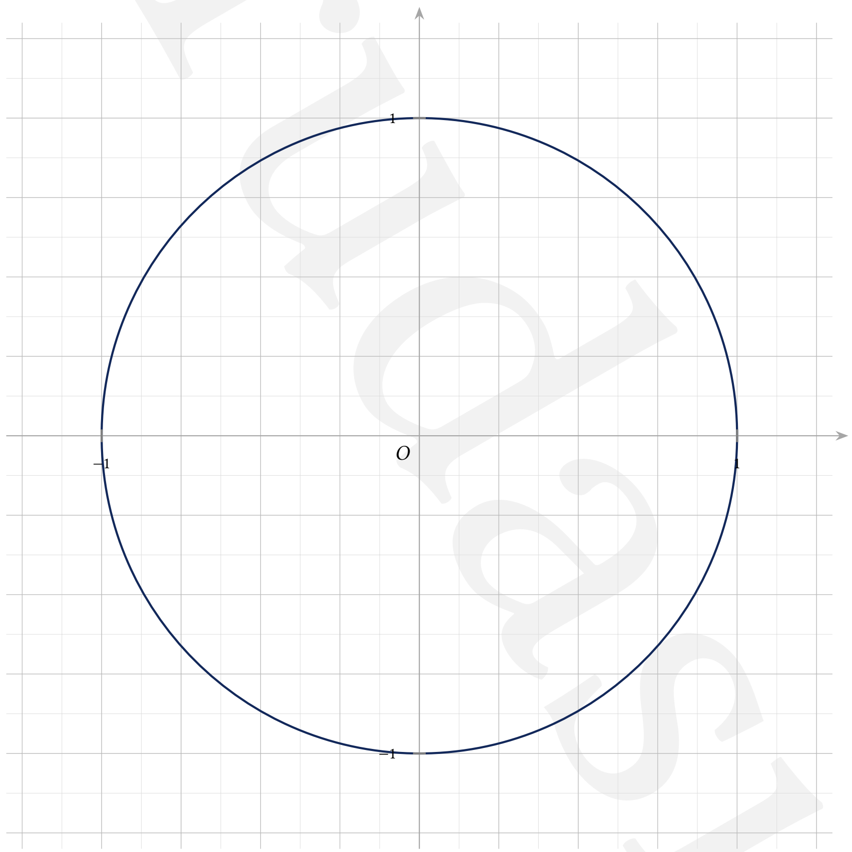
Amplitude $A = 2$, période $T = 2\pi/\omega = 2$ s. Le déphasage $\varphi = \pi/4$ décale la courbe vers la gauche de $T/8 = 0{,}25$ s.

Bilan

- cos, sin : $\mathbb{R} \to [-1;1]$, 2π-périodiques ; cos paire, sin impaire.
- **Variations sur** $[0;\pi]$: cos $\searrow$ de 1 à -1 ; sin $\nearrow$ sur $[0;\pi/2]$ puis $\searrow$ sur $[\pi/2;\pi]$.
- **Addition** : $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$; $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$.
- **Duplication** : $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$; $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.
- **Linéarisation** : $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$, $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.
- **Équations** : $\cos x = \cos a \Rightarrow x = \pm a + 2k\pi$; $\sin x = \sin a \Rightarrow x = a + 2k\pi$ ou $\pi - a + 2k\pi$.

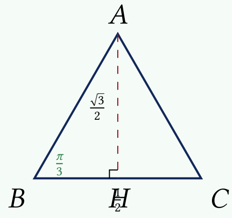
Cercle trigonométrique Ch. 11 — à compléter

À toi de jouer : place les angles remarquables.

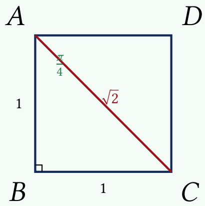


Compléments — démonstrations géométriques

Soit ABC équilatéral de côté 1. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors H est milieu de $[BC]$: $BH = \frac{1}{2}$.
Pythagore dans ABH rectangle en H : $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, donc $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Comme l'angle $\widehat{ABH} = \frac{\pi}{3}$: $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$. ■

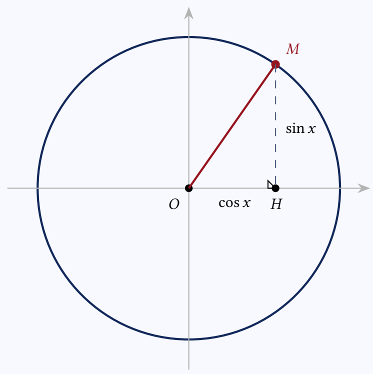


Soit $ABCD$ un carré de côté 1. La diagonale AC vérifie $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2$, donc $AC = \sqrt{2}$. Le triangle ABC est rectangle isocèle en B, et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$.
Donc $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ■



$M(\cos x\,;\ \sin x)$ est sur le cercle unité. Si H est le projeté de M sur (Ox), alors $OH = |\cos x|$ et $HM = |\sin x|$.
Le triangle OHM est rectangle en H. Pythagore donne :

$$OH^2 + HM^2 = OM^2, \quad \text{soit} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$



Carte mentale Ch. 11 — à compléter

À toi de jouer : recopie la carte mentale dans la grille.