Suites arithmétiques et géométriques

Chapitre 10 — 1re Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Suite arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r$. Formule explicite $u_n = u_0 + nr$. Suite géométrique : $u_{n+1} = q \cdot u_n$. Formule explicite $u_n = u_0 \cdot q^n$. Somme arithmétique $\sum k$, somme géométrique $\sum q^k$.

Démonstrations : Pour démontrer qu'une suite est arithmétique : montrer $u_{n+1} - u_n$ constant. Pour démontrer géométrique : montrer u_{n+1}/u_n constant. Sens de variation : signe de r ou comparaison de q à 1 (selon signe de u_0).

Capacités : Reconnaître une suite arith./géom., calculer raison et premier terme. Établir une formule explicite. Calculer des sommes. Étudier le sens de variation.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Notation (u_n), terme général u_n.
- Définition explicite $u_n = f(n)$ et récurrente $u_{n+1} = g(u_n)$.
- Sens de variation : signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Évolution en pourcentage (collège).
- Calcul littéral, manipulation des puissances.
- Représentation graphique d'un nuage de points.

Suite arithmétique	On ajoute toujours le même nombre r : $u_{n+1} = u_n + r$.
Suite géométrique	On multiplie toujours par le même nombre q : $u_{n+1} = q \cdot u_n$.
Formules explicites	$u_n = u_0 + nr$ (arith.) ; $u_n = u_0 \cdot q^n$ (géom.).
Sens de variation	Selon le signe de r ou la position de q par rapport à 1.
Sommes	$\sum_{k=0}^{n} u_k$: formules pour arith. et géom.
Applications	Évolution en pourcentage, capitalisation, problèmes concrets.

Activités d'introduction

Activité 1 — Reconnaître arithmétique ou géométrique

Objectif : découvrir les deux types de suites usuelles. *Durée : 25 min.*

On considère deux suites : $a_n : 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ \dots$ et $b_n : 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ \dots$

1. Pour la suite (a_n) : calculer $a_1 - a_0$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$. Que constate-t-on ?

2. Pour la suite (b_n) : calculer $\frac{b_1}{b_0}, \frac{b_2}{b_1}, \frac{b_3}{b_2}$. Que constate-t-on ?

3. Donner a_5 et b_5. Donner aussi a_{20} et b_{20}.

Correction (prof)

1. $a_1 - a_0 = 3$, $a_2 - a_1 = 3$, $a_3 - a_2 = 3$. La différence est constante = 3. La suite (a_n) est dite **arithmétique de raison** 3.

2. $\frac{b_1}{b_0} = 2$, $\frac{b_2}{b_1} = 2$, $\frac{b_3}{b_2} = 2$. Le quotient est constant = 2. La suite (b_n) est dite **géométrique de raison** 2.

3. $a_5 = a_0 + 5 \times 3 = 20$. $a_{20} = a_0 + 20 \times 3 = 65$.

$b_5 = b_0 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$. $b_{20} = 3 \times 2^{20} = 3\,145\,728$.

1 Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

r s'appelle la **raison** de la suite.

Définition — Suite arithmétique

On passe d'un terme au suivant en **ajoutant** toujours le même nombre r.

Méthode — Démontrer qu'une suite est arithmétique (Monka)

Soit $u_n = 2n + 5$. Démontrer que (u_n) est arithmétique.

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 5 - (2n+5) = 2n + 2 + 5 - 2n - 5 = 2.$
La différence est constante, égale à 2. Donc (u_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et $u_0 = 5$.

Si (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Plus généralement, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$: $u_n = u_p + (n-p)r$.

Propriété — Formule explicite

Démonstration au programme

Par récurrence ou en additionnant : $u_n = u_0 + \underbrace{r + r + \ldots + r}_{n \text{ fois}} = u_0 + nr$. ■

Méthode — Expression explicite (Monka)

Soit (u_n) arithmétique avec $u_0 = 4$ et $r = -3$. Donner u_n et calculer u_{20}.

$u_n = 4 + n \times (-3) = 4 - 3n$. Donc $u_{20} = 4 - 60 = -56$.

Méthode — Trouver raison et premier terme (Monka)

(u_n) arithmétique avec $u_5 = 12$ et $u_{20} = -3$. Trouver r et u_0.

$u_{20} = u_5 + (20-5)r$, donc $-3 = 12 + 15r$, soit $r = -1$.
$u_0 = u_5 - 5r = 12 - 5 \times (-1) = 17$.

Soit (u_n) arithmétique de raison r.
— Si $r > 0$: (u_n) est strictement **croissante**.
— Si $r < 0$: (u_n) est strictement **décroissante**.
— Si $r = 0$: (u_n) est **constante**.

Propriété — Sens de variation

Démonstration

$u_{n+1} - u_n = r$. Le signe de la différence donne le sens de variation. ■

2 Suites géométriques

Une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un nombre réel non nul q tel que :

$$\boxed{u_{n+1} = q \cdot u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

q s'appelle la **raison** de la suite.

Définition — Suite géométrique

On passe d'un terme au suivant en **multipliant** toujours par le même nombre q.

Méthode — Démontrer qu'une suite est géométrique (Monka)

Soit $u_n = 3 \cdot 2^n$. Démontrer que (u_n) est géométrique.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = 2.$

Le quotient est constant. Donc (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et $u_0 = 3$.

Exemple concret — Évolution en pourcentage

Une population de 10 000 habitants augmente de 4% chaque année. Soit P_n la population après n années.

$P_{n+1} = P_n + \dfrac{4}{100} P_n = 1{,}04 \cdot P_n$.

Donc (P_n) est géométrique de raison $q = 1{,}04$ et $P_0 = 10\,000$. D'où $P_n = 10\,000 \times 1{,}04^n$.

Si (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors :

$$\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$$

Plus généralement : $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$.

Propriété — Formule explicite

Démonstration au programme

$u_n = u_0 \cdot \underbrace{q \cdot q \cdots q}_{n \text{ fois}} = u_0 \cdot q^n$. ■

Méthode — Expression explicite (Monka)

(v_n) géométrique avec $v_0 = 5$, $q = \dfrac{1}{2}$. Donner v_n, calculer v_{10}.

$v_n = 5 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{5}{2^n}$. Donc $v_{10} = \dfrac{5}{1024} \approx 0{,}00488$.

Méthode — Trouver raison et premier terme (Monka)

(u_n) géométrique avec $u_3 = 24$ et $u_6 = 192$. Trouver q et u_0.

$u_6 = u_3 \cdot q^{6-3} = u_3 \cdot q^3$, donc $192 = 24q^3$, soit $q^3 = 8$, donc $q = 2$.
$u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = \dfrac{24}{8} = 3$.

Soit (u_n) géométrique de raison q et $u_0 > 0$.
— Si $q > 1$: (u_n) est strictement **croissante**.
— Si $0 < q < 1$: (u_n) est strictement **décroissante**.
— Si $q = 1$: (u_n) est **constante**.
*Si $u_0 < 0$, on inverse les sens. Si $q < 0$, la suite est **alternée**.*

Propriété — Sens de variation (cas $u_0 > 0$)

3 Sommes de termes consécutifs

1) Somme des n premiers entiers

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Propriété — Somme $1 + 2 + \cdots + n$

Démonstration au programme (méthode de Gauss)

On note $S = 1 + 2 + \cdots + n$ et on l'écrit aussi à l'envers : $S = n + (n-1) + \cdots + 1$.
En sommant les deux expressions colonne par colonne, chaque colonne donne $n + 1$ et il y en a n :

$$2S = n \times (n+1) \quad \Longrightarrow \quad S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

■

2) Somme d'une suite arithmétique

Méthode — Somme d'une suite arithmétique (Monka)

Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$ avec $u_n = 2n + 1$.

Formule générale : pour une suite arithmétique :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Ici : 21 termes (u_0 à u_{20}), $u_0 = 1$, $u_{20} = 41$.
$S = 21 \times \dfrac{1 + 41}{2} = 21 \times 21 = \boxed{441}$.

3) Somme d'une suite géométrique

Soit q un réel différent de 1 et $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}$$

Propriété — Somme géométrique

(Somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q.)

Démonstration au programme

On pose $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. Alors :

$$qS = q + q^2 + \cdots + q^{n+1}.$$

On soustrait : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, soit $(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$.

Comme $q \neq 1$: $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$. ■

Méthode — Somme géométrique (Monka)

Calculer $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{10}$.

Suite géométrique de raison $q = 2$, 11 termes. $S = \dfrac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \dfrac{1 - 2048}{-1} = \boxed{2047}$.

Méthode — Application : capitalisation

On place 1 000 € à 3% par an pendant 10 ans. Quel capital final ?

Suite géométrique : $C_n = 1000 \times 1{,}03^n$, donc $C_{10} = 1000 \times 1{,}03^{10} \approx \boxed{1\,343{,}92}$ €.

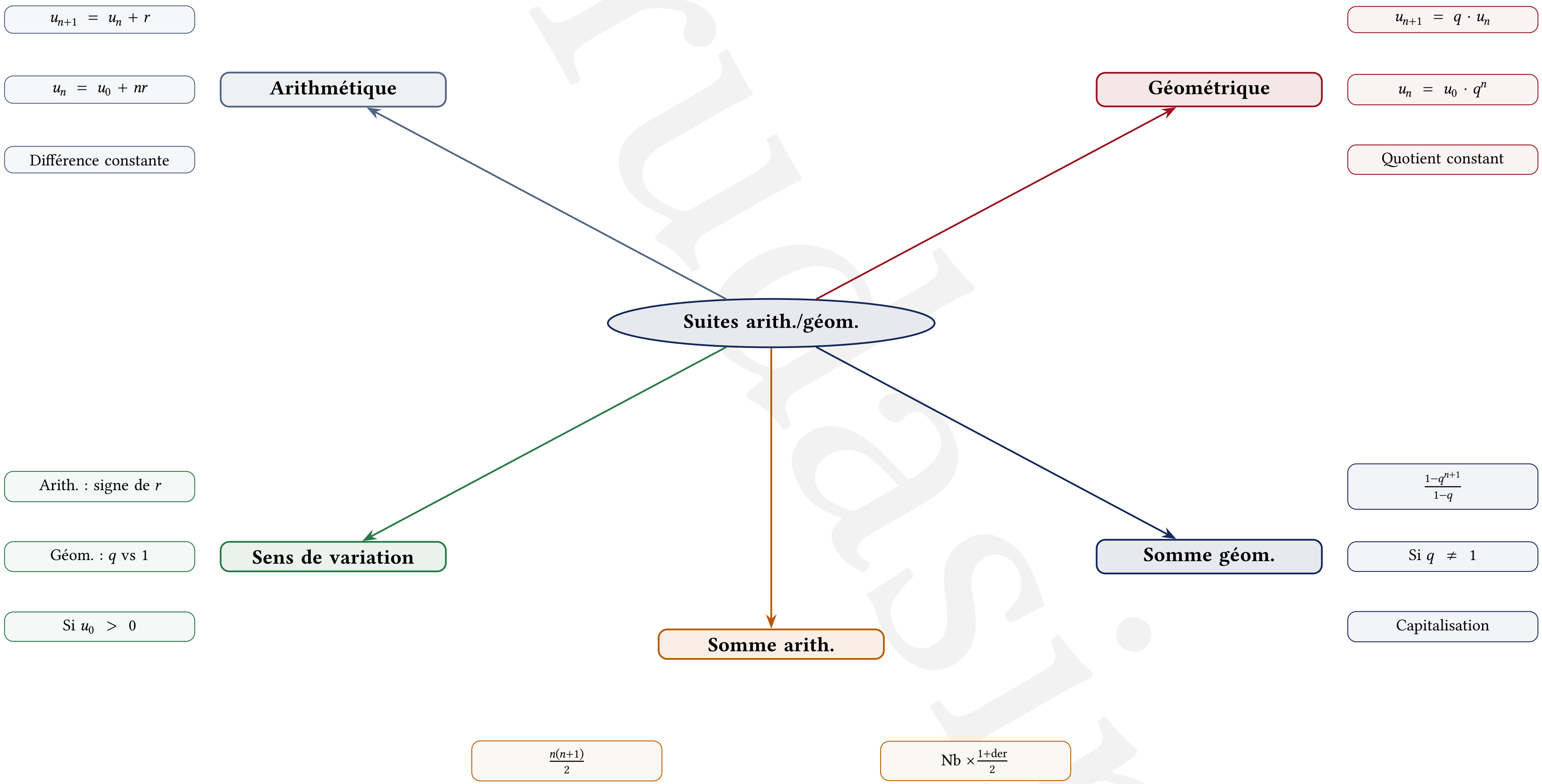
Si on ajoute en plus 500 € chaque année : formule mêlant suite arithmétique et géométrique (calcul plus complexe).

Synthèse à retenir

1. Arithmétique	$u_{n+1} = u_n + r$; $u_n = u_0 + nr$; $r = u_{n+1} - u_n$ constant.
2. Géométrique	$u_{n+1} = q \cdot u_n$; $u_n = u_0 \cdot q^n$; $q = u_{n+1}/u_n$ constant.
3. Sens de variation	Arith. : signe de r. Géom. ($u_0 > 0$) : position de q vs 1.
4. Somme arithmétique	$S = (\text{nb termes}) \times \dfrac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}$.
5. Somme géométrique	$1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$.

Carte mentale — Ch. 10 — Suites arith. et géom.

Les 5 piliers à maîtriser avant le DS.



En Terminale, on étudiera les limites des suites.