Second degré — Partie 1

Chapitre 1 — 1re Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1re Spé Maths

Contenus : Fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Variations, extremum atteint au sommet $S(\alpha; \beta)$. Parabole : axe de symétrie d'équation $x = \alpha$.

Démonstrations : Tout trinôme admet une forme canonique : $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Si $a > 0$: minimum β en α; si $a < 0$: maximum.

Capacités : Passer de la forme développée à la forme canonique. Lire le sommet et les variations. Tracer une parabole et identifier son axe de symétrie. Résoudre des problèmes d'optimisation simples.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Identités remarquables : $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$.
- Fonction carré $x \mapsto x^2$: décroissante puis croissante, minimum en 0.
- Équation produit nul : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
- Tableaux de variations et de signes.
- Fonctions de référence (carré, affine).
- Résolution graphique d'équations et inéquations.

Trinôme	Fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Forme canonique	$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, écriture privilégiée pour étudier les variations.
Sommet de la parabole	Point $S(\alpha\,;\,\beta)$, extremum de $f : \alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha)$.
Sens de variation	Selon le signe de a : sourire ($a > 0$) ou frimousse triste ($a < 0$).
Axe de symétrie	Droite verticale d'équation $x = \alpha$.
Lien vers Ch. 3	Discriminant, racines, factorisation et signe du trinôme.

Activités d'introduction

Activité 1 — Découvrir les fonctions polynômes de degré 2 (Magnard p. 82)

Objectif : découvrir les fonctions polynômes de degré 2 par une approche graphique. *Durée : 30 min.*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
1. Calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.
2. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).
3. Conjecturer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, l'extremum et son abscisse.
4. Quel est l'axe de symétrie de la courbe ?
5. Résoudre graphiquement $f(x) = 0$ puis $f(x) > 0$.

Correction (prof)

1. On dresse le tableau :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

2. On obtient une parabole tournée vers le haut, passant par les points calculés.
3. La fonction f semble strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$ puis strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$. Le minimum vaut -4 et est atteint en $x = 1$.
4. L'axe de symétrie est la droite verticale d'équation $x = 1$.
5. Graphiquement : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$. $f(x) > 0$ ssi $x \in\,]-\infty\,;\,-1[\,\cup\,]3\,;\,+\infty[$.

Activité 2 — La méthode d'Al-Khwarizmi (Magnard p. 82)

Objectif : utiliser la méthode historique d'Al-Khwarizmi (IXe siècle) pour résoudre une équation du second degré. *Durée : 30 min.*

On souhaite résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ (avec $x > 0$).

1. On considère un carré $ABCD$ de côté x et deux rectangles $BEFC$ et $DCGH$ de côtés 5 et x. On complète la figure par le carré $CFIG$ pour obtenir le grand carré $AEIH$.
a) Calculer Aire$(ABCD)$. **b)** Calculer Aire$(BEFC)$ et Aire$(DCGH)$.
c) Exprimer Aire$(AEIH)$ de deux façons : en fonction de $x+5$, et comme somme des aires des morceaux.
d) En déduire que $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$.
e) Résoudre alors l'équation $x^2 + 10x = 39$.

2. Appliquer la même méthode pour résoudre l'équation $2x^2 + 10x = 48$ (avec $x > 0$).

Correction (prof)

1.a) Aire$(ABCD) = x^2$. **b)** Aire$(BEFC) =$ Aire$(DCGH) = 5x$.
c) D'une part Aire$(AEIH) = (x+5)^2$. D'autre part, Aire$(AEIH) = x^2 + 5x + 5x + 5^2 = x^2 + 10x + 25$.
d) Donc $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$, soit $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$.
e) L'équation devient $(x+5)^2 - 25 = 39 \Leftrightarrow (x+5)^2 = 64 \Leftrightarrow x+5 = 8$ ou $x+5 = -8$, soit $x = 3$ ou $x = -13$. Comme $x > 0$, on a $\boxed{x = 3}$.

2. On commence par diviser par 2 : $x^2 + 5x = 24$. On construit un carré de côté x et deux rectangles de côtés $\frac{5}{2}$ et x, complétés par un carré de côté $\frac{5}{2}$. On obtient $(x + \frac{5}{2})^2 = x^2 + 5x + 6{,}25$. Donc $x^2 + 5x = 24 \Leftrightarrow (x+2{,}5)^2 = 30{,}25 \Leftrightarrow x + 2{,}5 = 5{,}5$ ou $-5{,}5$, soit $x = 3$ ou $x = -8$. Comme $x > 0$, $\boxed{x = 3}$.

1 Fonction polynôme du second degré

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0.$$

Les nombres a, b, c s'appellent les **coefficients** du trinôme.

Définition — Fonction polynôme du second degré

La condition $a \neq 0$ est essentielle : si $a = 0$, on obtient $f(x) = bx + c$ qui est une fonction affine (degré 1).

Exemples et contre-exemples (Monka)

Sont des trinômes :
- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$ (avec $a = 3$, $b = -7$, $c = 3$).
- $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 5x + \dfrac{3}{5}$.
- $h(x) = 4 - 2x^2$ (avec $a = -2$, $b = 0$, $c = 4$).
- $k(x) = (x - 4)(5 - 2x) = -2x^2 + 13x - 20$ (à développer).

Ne sont pas des trinômes :
- $m(x) = 5x - 3$ (degré 1, fonction affine).
- $n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ (degré 4).

2 Forme canonique d'un trinôme

Toute fonction polynôme f du second degré, $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$$

appelée **forme canonique** de f, avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Théorème — Forme canonique

Démonstration (à connaître)

Comme $a \neq 0$, on factorise par a :

$$\begin{aligned}
f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x - \underbrace{\left(-\frac{b}{2a}\right)}_{\alpha}\right)^2 + \underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a}}_{\beta}.
\end{aligned}$$

On a donc bien $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. ■

Méthode — Déterminer la forme canonique (Monka)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$. Écrire f sous sa forme canonique.

Méthode 1 — Par complétion du carré :

$$\begin{aligned}
f(x) = 2x^2 - 20x + 10 &= 2[x^2 - 10x] + 10 \\
&= 2[x^2 - 10x + 25 - 25] + 10 \quad (\text{car } x^2 - 10x \text{ est le début de } (x-5)^2) \\
&= 2[(x-5)^2 - 25] + 10 \\
&= 2(x-5)^2 - 50 + 10 \\
&= 2(x-5)^2 - 40.
\end{aligned}$$

Méthode 2 — Par formules directes : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-20}{2 \times 2} = 5$; $\beta = f(\alpha) = f(5) = 2 \times 25 - 100 + 10 = -40$.

Conclusion : $\boxed{f(x) = 2(x-5)^2 - 40}$ est la forme canonique de f.

3 Variations, extremum et parabole

1) Sens de variation

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme et $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

- Si $a > 0$: f est strictement **décroissante** sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ puis strictement **croissante** sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ (forme « sourire »).
- Si $a < 0$: f est strictement **croissante** sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ puis strictement **décroissante** sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ (forme « frimousse triste »).

Propriété — Sens de variation

Cas $a > 0$ (sourire)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	β	↗ $+\infty$

Minimum β atteint en α.

Cas $a < 0$ (frimousse triste)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	β	↘ $-\infty$

Maximum β atteint en α.

2) Extremum

Exemple introductif (Monka)

Soit $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$.
On a $2(x-1)^2 \geq 0$, donc $2(x-1)^2 + 3 \geq 3$, soit $f(x) \geq 3$.
Or $f(1) = 2 \times 0 + 3 = 3$, donc pour tout x, $f(x) \geq f(1)$.
f admet donc un **minimum** en 1, et ce minimum vaut 3.

Soit f un trinôme sous forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.
— Si $a > 0$: f admet un **minimum** en $x = \alpha$, égal à β.
— Si $a < 0$: f admet un **maximum** en $x = \alpha$, égal à β.
Formules : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Propriété — Extremum d'un trinôme

3) Parabole

La représentation graphique d'un trinôme f s'appelle une **parabole**.
Le point $S(\alpha\,;\,\beta)$ s'appelle le **sommet** de la parabole : il correspond à l'extremum de f.
La parabole admet pour **axe de symétrie** la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Définition — Parabole, sommet, axe de symétrie

Méthode — Caractéristiques d'une parabole (Monka)

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 1$. Déterminer le sommet S de la parabole et son axe de symétrie.

- Coordonnées du sommet : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-12}{4} = 3$; $\beta = f(3) = 2 \times 9 - 12 \times 3 + 1 = 18 - 36 + 1 = -17$.
- Donc $\boxed{S(3\,;\,-17)}$.
- Comme $a = 2 > 0$, ce sommet correspond à un **minimum** (parabole sourire).
- Axe de symétrie : droite d'équation $\boxed{x = 3}$.

Méthode — Tracer une parabole (Monka)

Représenter graphiquement $f(x) = -x^2 + 4x$.

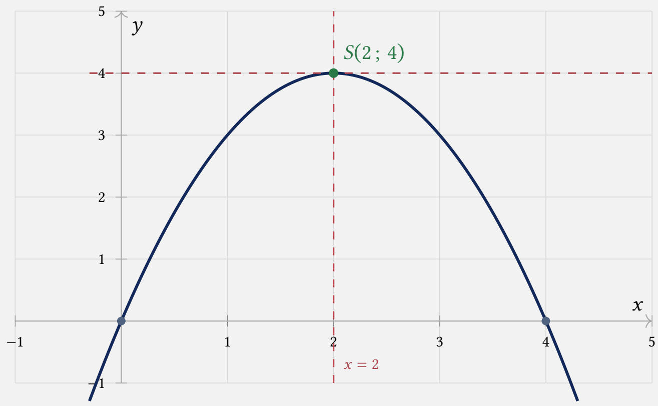
Étape 1 : Forme canonique : $f(x) = -(x^2 - 4x) = -(x^2 - 4x + 4 - 4) = -(x - 2)^2 + 4$.
Donc $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $a = -1 < 0$: f admet un maximum $\beta = 4$ en $\alpha = 2$.

Étape 2 : Tableau de variations :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	4	↘ $-\infty$

Étape 3 : Quelques points : $f(0) = 0$, $f(1) = -1 + 4 = 3$, $f(2) = 4$ (sommet), $f(3) = -9 + 12 = 3$ (par symétrie), $f(4) = 0$ (par symétrie).

Étape 4 : Tracé final.



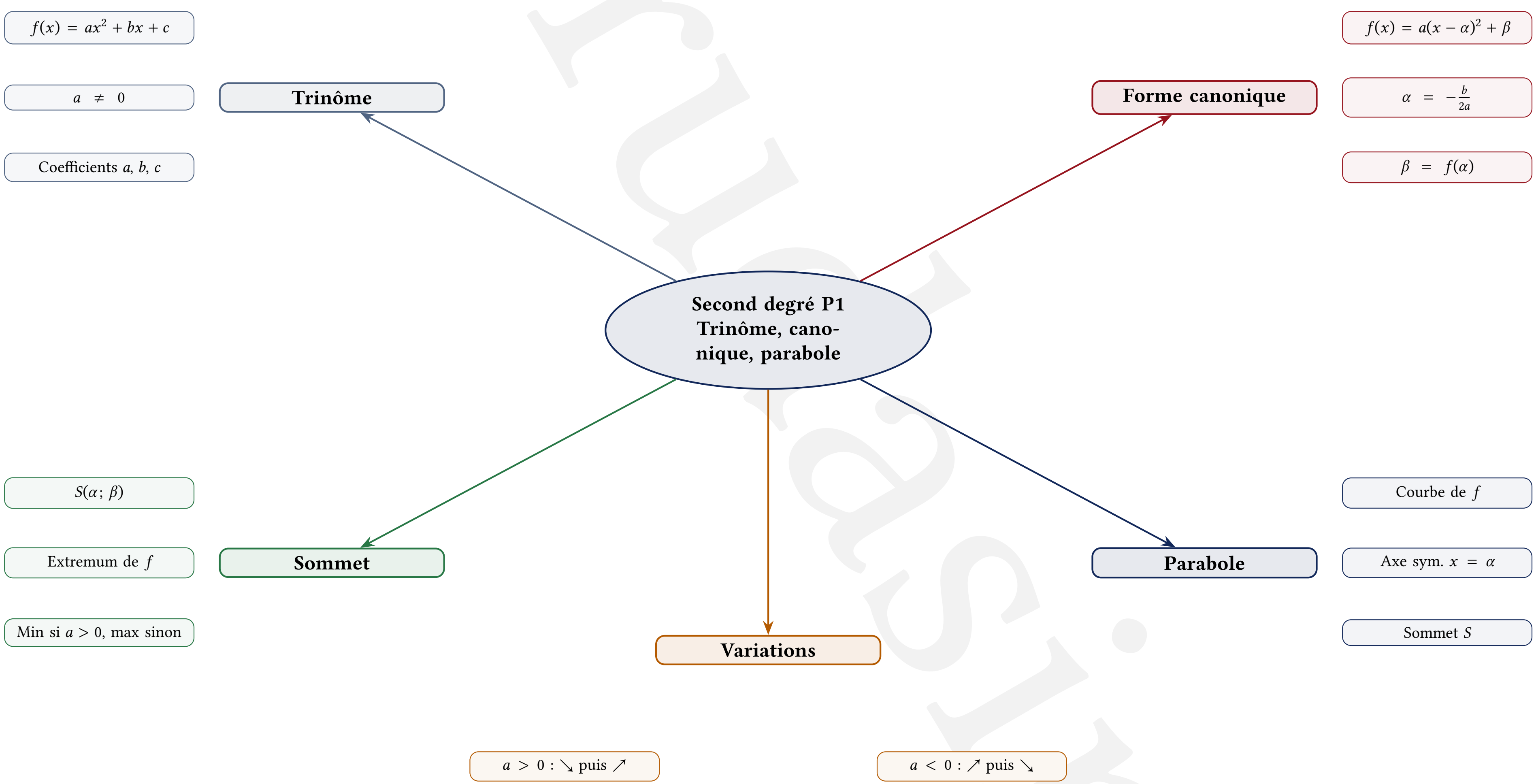
Parabole « frimousse triste » ($a < 0$), sommet $S(2\,;\,4)$, axe de symétrie $x = 2$, racines 0 et 4.

Synthèse à retenir

1. Trinôme	$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$; coefficients a, b, c.
2. Forme canonique	$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha)$.
3. Sommet	$S(\alpha\,;\,\beta)$: extremum de f et axe de symétrie $x = \alpha$.
4. Variations	Selon le signe de a : sourire ($a > 0$, min) ou triste ($a < 0$, max).
5. Parabole	Courbe de f, symétrique par rapport à la droite $x = \alpha$.

Carte mentale — Chapitre 1 — Second degré P1

Les 5 piliers à maîtriser avant le DS.



Au Ch. 3, on étudiera Δ, racines et factorisation.