Second degré — Partie 1

Chapitre 1 — 1^{re} Spé Maths

Table des matières

PROGRAMME BO — 1^{re} Spé Maths

Contenus : Fonction polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Variations, extremum atteint au sommet $S(\alpha; \beta)$. Parabole : axe de symétrie d'équation $x = \alpha$.

Démonstrations : Tout trinôme admet une forme canonique : $\alpha = -\frac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$. Si $a > 0$: minimum β en α; si $a < 0$: maximum.

Capacités : Passer de la forme développée à la forme canonique. Lire le sommet et les variations. Tracer une parabole et identifier son axe de symétrie. Résoudre des problèmes d'optimisation simples.

Tout le cours

Positionnement dans la formation

- Identités remarquables : $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)(a-b)$.
- Fonction carré $x \mapsto x^2$: décroissante puis croissante, minimum en 0.
- Équation produit nul : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
- Tableaux de variations et de signes.
- Fonctions de référence (carré, affine).
- Résolution graphique d'équations et inéquations.

Trinôme	Fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Forme canonique	$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, écriture privilégiée pour étudier les variations.
Sommet de la parabole	Point $S(\alpha\,;\,\beta)$, extremum de f : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha)$.
Sens de variation	Selon le signe de a : sourire ($a > 0$) ou frimousse triste ($a < 0$).
Axe de symétrie	Droite verticale d'équation $x = \alpha$.
Lien vers Ch. 3	Discriminant, racines, factorisation et signe du trinôme.

Activités d'introduction

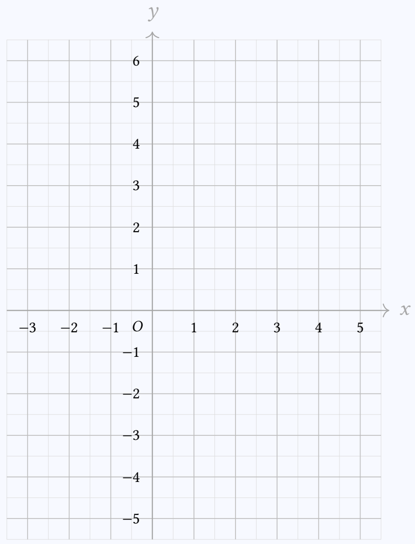
Activité 1 — Découvrir les fonctions polynômes de degré 2 (Magnard p. 82)

Objectif : découvrir les fonctions polynômes de degré 2 par une approche graphique. *Durée : 30 min.*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

1. Calculer $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

2. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).



3. Conjecturer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, l'extremum et son abscisse.

4. Quel est l'axe de symétrie de la courbe ?

5. Résoudre graphiquement $f(x) = 0$ puis $f(x) > 0$.

Activité 2 — La méthode d'Al-Khwarizmi (Magnard p. 82)

Objectif : utiliser la méthode historique d'Al-Khwarizmi (IXe siècle) pour résoudre une équation du second degré. *Durée : 30 min.*

On souhaite résoudre l'équation $x^2 + 10x = 39$ (avec $x > 0$).

1. On considère un carré $ABCD$ de côté x et deux rectangles $BEFC$ et $DCGH$ de côtés 5 et x. On complète la figure par le carré $CFIG$ pour obtenir le grand carré $AEIH$.
a) Calculer Aire($ABCD$). **b)** Calculer Aire($BEFC$) et Aire($DCGH$).

c) Exprimer Aire($AEIH$) de deux façons : en fonction de $x+5$, et comme somme des aires des morceaux.

d) En déduire que $x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$.

e) Résoudre alors l'équation $x^2 + 10x = 39$.

2. Appliquer la même méthode pour résoudre l'équation $2x^2 + 10x = 48$ (avec $x > 0$).

1 Fonction polynôme du second degré

On appelle **fonction polynôme du second degré** (ou **trinôme**) toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 0.$$

Les nombres a, b, c s'appellent les **coefficients** du trinôme.

Définition — Fonction polynôme du second degré

La condition $a \neq 0$ est essentielle : si $a = 0$, on obtient $f(x) = bx + c$ qui est une fonction affine (degré 1).

Exemples et contre-exemples (Monka)

Sont des trinômes :
- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$ (avec $a = 3$, $b = -7$, $c = 3$).
- $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5}$.
- $h(x) = 4 - 2x^2$ (avec $a = -2$, $b = 0$, $c = 4$).
- $k(x) = (x - 4)(5 - 2x) = -2x^2 + 13x - 20$ (à développer).

Ne sont pas des trinômes :
- $m(x) = 5x - 3$ (degré 1, fonction affine).
- $n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ (degré 4).

2 Forme canonique d'un trinôme

Toute fonction polynôme f du second degré, $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta}$$

appelée **forme canonique** de f, avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Théorème — Forme canonique

Démonstration (à connaître)

Comme $a \neq 0$, on factorise par a :

$$\begin{aligned}
f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x - \underbrace{\left(-\frac{b}{2a}\right)}_{\alpha}\right)^2 + \underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a}}_{\beta}.
\end{aligned}$$

On a donc bien $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. ■

Méthode — Déterminer la forme canonique (Monka)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$. Écrire f sous sa forme canonique.

Méthode 2 — Par formules directes : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \,?\,;\ \beta = f(\alpha) = \,?$

3 Variations, extremum et parabole

1) Sens de variation

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme et $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$.

— Si $a > 0$: f est strictement **décroissante** sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ puis strictement **croissante** sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ (forme « sourire »).

— Si $a < 0$: f est strictement **croissante** sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ puis strictement **décroissante** sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ (forme « frimousse triste »).

Propriété — Sens de variation

Cas $a > 0$ (sourire)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

Minimum β atteint en α.

Cas $a < 0$ (frimousse triste)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

Maximum β atteint en α.

2) Extremum

Exemple introductif (Monka)

Soit $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$.
On a $2(x-1)^2 \geq 0$, donc $2(x-1)^2 + 3 \geq 3$, soit $f(x) \geq 3$.
Or $f(1) = 2 \times 0 + 3 = 3$, donc pour tout x, $f(x) \geq f(1)$.
f admet donc un **minimum** en 1, et ce minimum vaut 3.

Soit f un trinôme sous forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$.

— Si $a > 0$: f admet un **minimum** en $x = \alpha$, égal à β.

— Si $a < 0$: f admet un **maximum** en $x = \alpha$, égal à β.

Formules : $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Propriété — Extremum d'un trinôme

3) Parabole

La représentation graphique d'un trinôme f s'appelle une **parabole**.
Le point $S(\alpha\,;\,\beta)$ s'appelle le **sommet** de la parabole : il correspond à l'extremum de f.
La parabole admet pour **axe de symétrie** la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Définition — Parabole, sommet, axe de symétrie

Méthode — Caractéristiques d'une parabole (Monka)

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 1$. Déterminer le sommet S de la parabole et son axe de symétrie.

Méthode — Tracer une parabole (Monka)

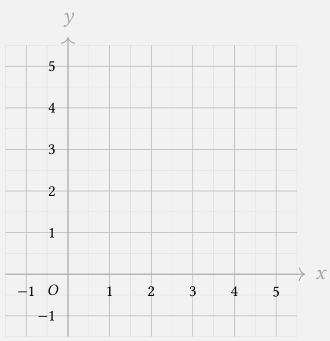
Représenter graphiquement $f(x) = -x^2 + 4x$.

Étape 1 : Forme canonique.

Étape 2 : Tableau de variations.

Étape 3 : Quelques points.

Étape 4 : Tracé dans le repère ci-dessous.

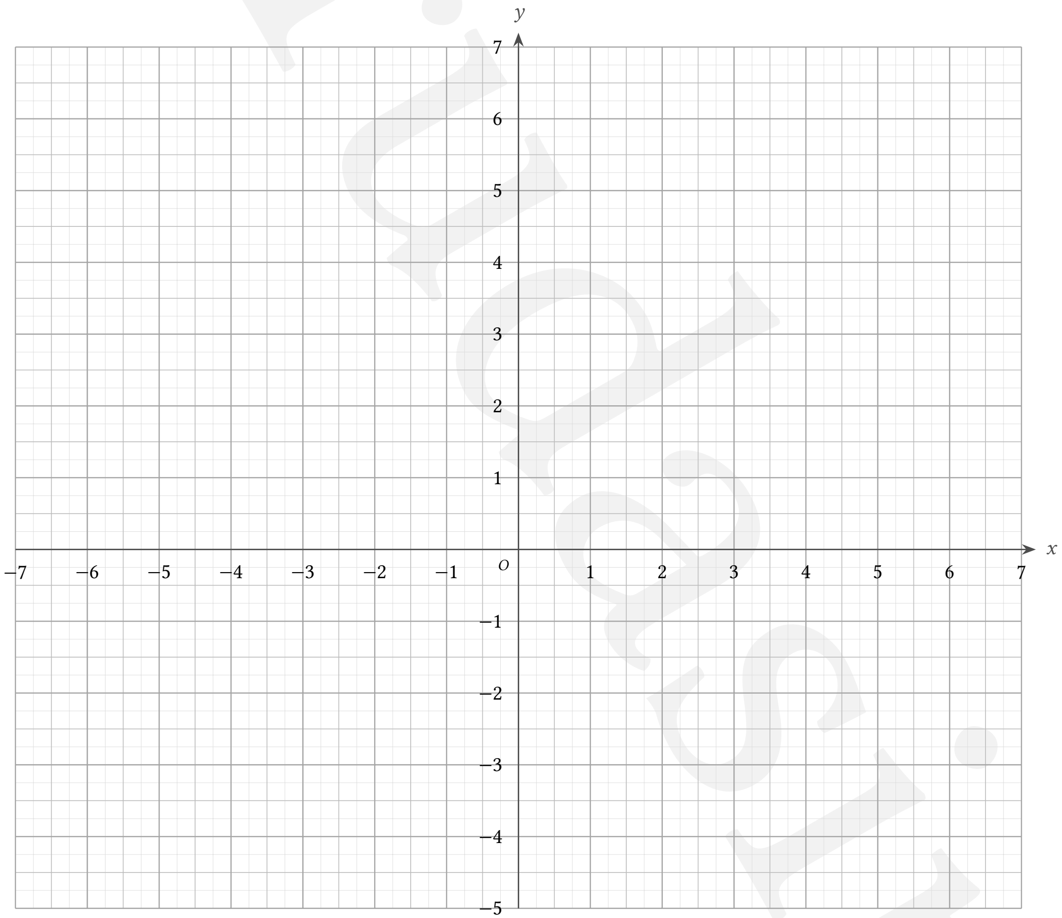


Synthèse à retenir

1. Trinôme	$f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$; coefficients a, b, c.
2. Forme canonique	$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = f(\alpha)$.
3. Sommet	$S(\alpha\,;\,\beta)$: extremum de f et axe de symétrie $x = \alpha$.
4. Variations	Selon le signe de a : sourire ($a > 0$, min) ou triste ($a < 0$, max).
5. Parabole	Courbe de f, symétrique par rapport à la droite $x = \alpha$.

Parabole Ch. 1 — à compléter

À toi de jouer : trace une parabole et place son sommet, son axe de symétrie.



Carte mentale Ch. 1 — à compléter

À toi de jouer : recopie la carte mentale dans la grille (5 piliers : trinôme, forme canonique, sommet, variations, parabole).