

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Table des matières

I	Équations différentielles d'ordre 1	2
I.1	Solution générale de l'équation sans second membre	2
I.2	Solution particulière de l'équation différentielle (E)	3
I.3	Ensemble des solutions d'une équation différentielle	3
I.4	Unicité de la solution sous condition initiale	3
II	Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants	5
II.1	Solution générale de l'équation sans second membre	5
II.2	Solution particulière de l'équation différentielle (E)	6
II.3	Ensemble des solutions d'une équation différentielle	7
II.4	Unicité de la solution sous conditions initiales	7

Bref historique : C'est au début du $XVII^{me}$ siècle, avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz, qu'apparut la notion d'équations différentielles.

Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Au début du $XVIII^{me}$ siècle les méthodes classiques de résolution de certaines équations (linéaires et de Bernoulli notamment) furent découvertes.

Avec le développement de la mécanique, la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques (grâce à Euler, Lagrange, Laplace ...).

Une équation différentielle est une équation liant une fonction et sa ou ses dérivée(s).
Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

I Équations différentielles d'ordre 1

Définition 1

Soient a, b et c trois fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et y la fonction inconnue, définie et dérivable sur l'intervalle I . On suppose de plus que la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I .

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type :

$$(E) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x).$$

Pour plus de clarté, nous allons travailler sur un exemple : celui du BTS 2008.

On considère l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = xe^x$ où y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur \mathbb{R} , et y' la fonction dérivée de y .

1. Déterminer les solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$.
2. Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (-x - 1)e^x$.
 Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

Exemple 1

Dans cet exemple, les fonctions a, b et c sont définies sur \mathbb{R} par :

$$\rightarrow a(x) = 1, b(x) = -2 \text{ et } c(x) = xe^x.$$

I.1 Solution générale de l'équation sans second membre

Soit $(E_0) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$, cette équation est appelée équation différentielle sans second membre, ou encore équation homogène associée à (E) .

a étant une fonction ne s'annulant pas, on peut encore écrire $(E_0) : y'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}y(x) = 0$.

Théorème 1

a et b étant des fonctions dérivables sur I avec a ne s'annulant pas sur I , l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_0) : y'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}y(x) = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur I par $y(x) = ke^{-G(x)}$ où k est une constante réelle et G une primitive de la fonction $\gamma(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$.

Remarque 1

Si a et b par des constantes, on retrouve le théorème vu en terminale.

Exemple 2

Dans l'exemple du BTS, on souhaite résoudre $(E_0) : y'(x) - 2y(x) = 0$.

On a $y(x) = -2$ et donc $G(x) = -2x$. La solution générale est alors du type $y_0(x) = ke^{2x}$.

I.2 Solution particulière de l'équation différentielle (E)**Définition 2**

On appelle solution particulière de l'équation différentielle $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ toute fonction y vérifiant cette équation.

Dans les sujets de BTS, toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données. Bien souvent, une fonction est proposée et il suffit de vérifier que c'est une solution particulière de (E) , c'est à dire de remplacer les "y" par la fonction proposée dans l'équation homogène (sans second membre), et de vérifier que l'on obtient bien le second membre

Exemple 3

Dans l'exemple du BTS, on nous demande de montrer que la fonction g est une solution particulière de (E) :

→ Calcul de la dérivée :

$$g(x) = (-x - 1)e^x \text{ donc } g'(x) = (-1)e^x + (-x - 1)e^x = (-x - 2)e^x.$$

→ Remplacement dans l'équation homogène :

$$g'(x) - 2g(x) = (-x - 2)e^x - 2(-x - 1)e^x = (-x - 2 + 2x + 2)e^x = xe^x.$$

→ g est donc bien une solution particulière de (E) .

I.3 Ensemble des solutions d'une équation différentielle**Théorème 2**

Les solutions d'une équation différentielle sont de la forme $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ où y_0 est la solution de l'équation sans second membre (E_0) et y_p une solution particulière de l'équation complète (E) .

Exemple 4

Dans notre exemple, on a $y_0(x) = ke^{-2x}$ et $y_p(x) = g(x) = (-x - 1)e^x$.

Donc, la solution de l'équation (E) est : $y(x) = ke^{-2x} + (-x - 1)e^x$.

I.4 Unicité de la solution sous condition initiale**Théorème 3**

Une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) possède une unique solution vérifiant une condition initiale du type $y(A) = B$.

Exemple 5

Dans l'exemple, on recherche la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$.

→ On a alors : $f(0) = 0 \iff ke^{-2 \times 0} + (-0 - 1)e^0 = 0 \iff k - 1 = 0 \iff k = 1$.

→ Soit $f(x) = e^{-2x} + (-x - 1)e^x$.

II Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 3

Soient $a \neq 0$, b et c trois constantes réelles, d une fonction dérivable sur I et y la fonction inconnue, définie et deux fois dérivable sur I .

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation du type

$$(E) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x).$$

Tout comme les équations différentielles d'ordre 1, nous allons travailler sur un exemple : celui du BTS 2009.

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = 8e^x$ où y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur \mathbb{R} , y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. Déterminer les solutions définies sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $(E_0) : y'' - 2y' + y = 0$.

2. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 4x^2e^x$.

Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E) .

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales

$$f(0) = -4 \text{ et } f'(0) = -4.$$

Exemple 6

Dans cet exemple, on a :

$$\rightarrow a = 1, b = -2, c = 1 \text{ et } d(x) = 4x^2e^x.$$

II.1 Solution générale de l'équation sans second membre

Théorème 4

On considère l'équation différentielle sans second membre $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$

d'équation caractéristique associée $ar^2 + br + c = 0$.

Le tableau ci-dessous donne les solutions de (E_0) en fonction du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: (dans tous les cas, a et b sont des constantes réelles quelconque).

	Solutions de l'équation caractéristique associée	Solution générale de (E_0)
$\Delta > 0$	2 racines réelles $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$
$\Delta = 0$	une racine double réelle $r = -\frac{b}{2a}$	$y(x) = (Ax + B)e^{rx}$
$\Delta < 0$	2 racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ où $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$y(x) = e^{\alpha x}[A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)]$

Exemple 7

Résolution de l'équation différentielle (E_0) : $y'' + \omega^2 y = 0$:

- L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2 + \omega^2 = 0$ de discriminant $\Delta = -4\omega^2 < 0$.
Les solutions de cette équation sont $0 + i\omega$ et $0 - i\omega$.
- Les solutions de (E_0) sont du type $y(x) = e^{0 \times x}[A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)] = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$.
- On remarque que l'on retrouve le résultat étudié en terminale!

Exemple 8

Résolution de l'équation différentielle (E_0) : $2y'' - 5y' - 3y = 0$:

- L'équation caractéristique de (E_0) est $2r^2 - 5r - 3 = 0$ de discriminant $\Delta = 49 > 0$.
Les solutions de cette équation sont $r_1 = -\frac{1}{2}$ et $r_2 = 3$.
- Les solutions de (E_0) sont donc du type $y_0(x) = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{3x}$

Exemple 9

Dans l'exemple du BTS, on souhaite résoudre (E_0) : $y'' - 2y' + y = 0$.

- L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2 - 2r + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 0$.
L'équation admet donc une solution double $r = 1$.
- Les solutions de (E_0) sont donc du type $y(x) = (Ax + B)e^x$.

II.2 Solution particulière de l'équation différentielle (E)**Définition 4**

On appelle solution particulière de l'équation différentielle $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$ toute fonction y vérifiant cette équation.

Dans les sujets de BTS, toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données. Bien souvent, une fonction est proposée et il suffit de vérifier que c'est une solution particulière de (E), c'est à dire de remplacer les "y" par la fonction proposée dans l'équation homogène (sans second membre), et de vérifier que l'on obtient bien le second membre

Exemple 10

Dans l'exemple du BTS, on nous demande de montrer que la fonction h est une solution particulière de (E).

- Calcul de la dérivée première :
 $h(x) = 4x^2e^x$ donc $h'(x) = 8xe^x + 4x^2e^x = (8x + 4x^2)e^x$.
- Calcul de la dérivée seconde :
 $h''(x) = (8 + 8x)e^x + (8x + 4x^2)e^x = (8 + 16x + 4x^2)e^x$.
- Remplacement dans l'équation homogène :
 $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = (8 + 16x + 4x^2)e^x - 2(8x + 4x^2)e^x + 4x^2e^x = (8 + 16x + 4x^2 - 16x - 8x^2 + 4x^2)e^x = 8e^x$.
- h est donc bien une solution particulière de (E).

II.3 Ensemble des solutions d'une équation différentielle

Théorème 5

Les solutions d'une équation différentielle sont de la forme $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ où y_0 est la solution de l'équation sans second membre et y_p une solution particulière de l'équation complète.

Exemple 11

Dans notre exemple, on a $y_0(x) = (Ax + B)e^x$ et $y_p(x) = h(x) = 4x^2e^x$.

Donc, la solution de l'équation (E) est : $y(x) = (Ax + B)e^x + 4x^2e^x = (4x^2 + Ax + B)e^x$.

II.4 Unicité de la solution sous conditions initiales

Théorème 6

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre (E) possède une unique solution vérifiant deux conditions initiales.

Exemple 12

Dans l'exemple, on recherche la solution f de (E) vérifiant $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

→ Première condition initiale :

$$f(0) = -4 \Leftrightarrow (4 \times 0^2 + A \times 0 + B)e^0 = -4 \Leftrightarrow B = -4.$$

→ Calcul de la dérivée :

$$f'(x) = (8x + A)e^x + (4x^2 + Ax + B)e^x = (4x^2 + 8x + Ax + A + B)e^x.$$

→ Deuxième condition initiale :

$$f'(0) = -4 \Leftrightarrow (4 \times 0^2 + 8 \times 0 + A \times 0 + A + B)e^0 = -4 \Leftrightarrow A + B = -4 \Leftrightarrow A = 0.$$

→ Conclusion :

$$f(x) = (4x^2 - 4)e^x.$$