

Planche 3 – Themes MEC1 (revisions premiere annee)

BTS MEC2 • Ch.6 • Fonctions + Integrales + Equa diff + Stats + VA

Sources : adaptations d'annales APMEP BTS et cours BTS MEC1.

II Fonctions et derivation

Exercice 4 – Calcul de derivees [Correction]

Deriver : **a)** $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$; **b)** $f(x) = xe^x$; **c)** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; **d)** $f(x) = e^{2x+3}$.

Exercice 5 – Etude de fonction [Correction]

$f(x) = (x - 1)e^{-x}$ sur \mathbb{R} .

- 1) Calculer $f'(x)$, etudier son signe.
- 2) Tableau de variations.
- 3) Limites en $\pm\infty$ (croissances comparees).

Exercice 6 – Limites usuelles [Correction]

Calculer : **a)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x}$; **b)** $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$; **c)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

III Calcul integral

Exercice 7 – Primitives [Correction]

Donner une primitive : **a)** $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$; **b)** $f(x) = \frac{1}{x}$; **c)** $f(x) = e^{2x}$; **d)** $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$; **e)** $f(x) = \sin(2x)$.

Exercice 8 – Integrales [Correction]

Calculer : **a)** $\int_0^1 (2x + 1) dx$; **b)** $\int_1^e \frac{dx}{x}$; **c)** $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$; **d)** $\int_0^1 e^{-x} dx$.

Exercice 9 – IPP [Correction]

Calculer $\int_0^1 xe^x dx$ par integration par parties.

Exercice 10 – Aire [Correction]

Calculer l'aire du domaine compris entre la courbe de $f(x) = x^2 - 2x$ et l'axe Ox sur $[0; 2]$.

IV Equations differentielles

Exercice 11 – Ordre 1 sans 2nd membre [Correction]

Resoudre $y' - 3y = 0$.

Exercice 12 – Ordre 1 avec 2nd membre [Correction]

Resoudre $y' + 2y = 4$ (constante a droite). Indication : chercher y_p constante.

Exercice 13 – Ordre 1 avec 2nd membre exponentiel [Correction]

Resoudre $y' - y = e^{2x}$. Indication : chercher $y_p = ke^{2x}$.

Exercice 14 – Ordre 2 a coefficients constants [Correction]

Resoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$.
Idem : $y'' + 4y = 0$.
Idem : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Exercice 15 – Conditions initiales [Correction]

Resoudre $y' - y = 0$ avec $y(0) = 2$.

V Statistiques a une variable

Exercice 16 – Serie [Correction]

Notes obtenues par 10 eleves : 8, 12, 15, 10, 9, 14, 11, 13, 12, 11. Calculer \bar{x} , mediane, V , σ .

Exercice 17 – Tableau d'effectifs [Correction]

x_i	5	6	7	8	9
n_i	4	7	12	5	2

Calculer \bar{x} et σ .

Exercice 18 – Caracteristiques [Correction]

Une serie de 100 valeurs a pour moyenne 50 et ecart-type 10. Apres transformation $Y = 2X - 30$, donner \bar{y} et σ_y .

VI VA discretees

Exercice 19 – Loi de probabilite [Correction]

X : $P(X = 0) = 0,2$; $P(X = 1) = 0,3$; $P(X = 2) = 0,4$; $P(X = 3) = a$. Determiner a , $E(X)$, $V(X)$.

Exercice 20 – Binomiale [Correction]

$X \sim \mathcal{B}(40; 0,1)$. Calculer $E(X)$, $\sigma(X)$, $P(X = 4)$, $P(X \leq 5)$.

Corrections

Correction 4 – Derivees [Énoncé]

a) $f'(x) = 6x - 5$. b) $f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$. c) $f'(x) = \frac{1-x-\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$. d) $f'(x) = 2e^{2x+3}$.

Correction 5 – Etude $(x-1)e^{-x}$ [Énoncé]

$f'(x) = e^{-x} + (x-1)(-e^{-x}) = e^{-x}(1-(x-1)) = e^{-x}(2-x)$. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.
Maximum en $x = 2$: $f(2) = e^{-2} \approx 0,135$. $\lim_{-\infty} f = -\infty \times 0 = ?$ on factorise :
 $f(x) = xe^{-x} - e^{-x} \rightarrow -\infty \cdot 0 - 0$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (croissance comparee).

Correction 6 – Limites usuelles [Énoncé]

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$ (croissance comparee). b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ (limite usuelle). c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$.

Correction 7 – Primitives [Énoncé]

a) $F(x) = x^3 + x^2 - x$. b) $F(x) = \ln|x|$. c) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2}$. d) $F(x) = \ln(x^2 + 1)$. e) $F(x) = -\frac{\cos(2x)}{2}$.

Correction 8 – Integrales [Énoncé]

a) $[x^2 + x]_0^1 = 2$. b) $[\ln x]_1^e = 1$. c) $[-\cos x]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$. d) $[-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} + 1 = 1 - 1/e \approx 0,632$.

Correction 9 – IPP [Énoncé]

$u' = e^x, v = x$: $u = e^x, v' = 1$. $\int_0^1 xe^x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x = (1 \cdot e - 0) - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$.

Correction 10 – Aire [Énoncé]

$f(x) = x(x-2)$ negative sur $[0; 2]$. Aire = $-\int_0^2 (x^2 - 2x) dx = -[x^3/3 - x^2]_0^2 = -(8/3 - 4) = 4 - 8/3 = 4/3$.

Correction 11 – $-y' - 3y = 0$ [Énoncé]

$y(x) = Ke^{3x}, K \in \mathbb{R}$.

Correction 12 – $-y' + 2y = 4$ [Énoncé]

$y_0 = Ke^{-2x}$. $y_p = 2$ (constante : $0 + 2 \times 2 = 4$ OK). $y = Ke^{-2x} + 2$.

Correction 13 – $-y' - y = e^{2x}$ [Énoncé]

$y_0 = Ke^x$. $y_p = ae^{2x} : 2ae^{2x} - ae^{2x} = ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow a = 1$. $y = Ke^x + e^{2x}$.

Correction 14 – Ordre 2 [Énoncé]

1) $r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 1$ ou 2 . $y = Ae^x + Be^{2x}$.
2) $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$. $y = A \cos 2x + B \sin 2x$.
3) $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = 2$ double. $y = (A + Bx)e^{2x}$.

Correction 15 – Conditions initiales [Énoncé]

$y' - y = 0 \Rightarrow y = Ke^x$. $y(0) = K = 2$. $y(x) = 2e^x$.

Correction 16 – Serie [Énoncé]

Tri : 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 14, 15. $\bar{x} = (8+9+10+11+11+12+12+13+14+15)/10 = 115/10 = 11,5$. Mediane = $(11+12)/2 = 11,5$.
 $\sum x_i^2 = 64+81+100+121+121+144+144+169+196+225 = 1365$. $V = 1365/10 - 11,5^2 = 136,5 - 132,25 = 4,25$. $\sigma = \sqrt{4,25} \approx 2,06$.

Correction 17 – Tableau [Énoncé]

$N = 4+7+12+5+2 = 30$. $\bar{x} = (4 \times 5 + 7 \times 6 + 12 \times 7 + 5 \times 8 + 2 \times 9)/30 = (20+42+84+40+18)/30 = 204/30 = 6,8$.
 $\sum n_i x_i^2 = 4 \times 25 + 7 \times 36 + 12 \times 49 + 5 \times 64 + 2 \times 81 = 100 + 252 + 588 + 320 + 162 = 1422$.
 $V = 1422/30 - 6,8^2 = 47,4 - 46,24 = 1,16$. $\sigma \approx 1,08$.

Correction 18 – Transformation [Énoncé]

$$\bar{y} = 2\bar{x} - 30 = 2 \times 50 - 30 = 70. \sigma_y = |2|\sigma_x = 20.$$

Correction 19 – Loi [Énoncé]

$$\sum p_i = 0,2 + 0,3 + 0,4 + a = 1 \Rightarrow a = 0,1.$$

$$E(X) = 0 + 0,3 + 0,8 + 0,3 = 1,4. E(X^2) = 0 + 0,3 + 1,6 + 0,9 = 2,8. V = 2,8 - 1,96 = 0,84.$$

Correction 20 – Binomiale [Énoncé]

$$E(X) = 4, V = 40 \times 0,1 \times 0,9 = 3,6, \sigma \approx 1,897.$$

$$P(X = 4) = \binom{40}{4} (0,1)^4 (0,9)^{36} \approx 0,2059.$$

$$P(X \leq 5) \approx 0,7937.$$