

Planche 1 – Probabilités, Loi normale, Stat inferentielle

BTS MEC2 • Ch.6 • Revisions Ch.1-2-3

Sources : adaptations d'annales APMEP BTS Groupements B/C/D 2001-2011, themes Ch.1, Ch.2, Ch.3 du programme MEC2.

I Probabilités conditionnelles

Exercice 1 – Tirage avec remise [Correction]

Une urne contient 5 boules rouges et 7 vertes. On tire 3 boules avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 rouges ?

Exercice 2 – Arbre pondéré [Correction]

Dans une production, 30% des pièces viennent de la ligne A, 70% de la ligne B. La ligne A produit 5% de défauts, la ligne B 2%. Une pièce est defectueuse : quelle est la probabilité qu'elle vienne de la ligne A ?

Exercice 3 – Tirage sans remise [Correction]

Dans un lot de 10 pièces dont 3 defectueuses, on tire 2 pièces sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 1 defectueuse ?

II Loi binomiale

Exercice 4 – Calcul direct [Correction]

$X \sim \mathcal{B}(15; 0, 2)$. Calculer $P(X = 3)$, $P(X \leq 5)$.

Exercice 5 – Au moins un succès [Correction]

$X \sim \mathcal{B}(n; 0, 1)$. Déterminer n tel que $P(X \geq 1) \geq 0, 95$.

Exercice 6 – Application industrie [Correction]

Un atelier produit 5% de pièces non conformes. On preleve 40 pièces. X : nombre de non conformes. Loi ? $E(X)$? $P(X \leq 2)$?

III Loi normale

Exercice 7 – Calcul direct [Correction]

$X \sim \mathcal{N}(50, 4)$ (donc $\sigma = 2$). Calculer $P(X \leq 53)$, $P(48 \leq X \leq 52)$, $P(X > 55)$.

Exercice 8 – Tolerance [Correction]

La cote d'une pièce X suit $\mathcal{N}(20; 0, 01)$ (mm). Les tolérances sont $[19, 8; 20, 2]$. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit hors tolérance ?

Exercice 9 – Standardisation [Correction]

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Déterminer μ et σ sachant $P(X \leq 12) = 0, 8413$ et $P(X \leq 8) = 0, 1587$.

IV TLC et échantillonnage

Exercice 10 – Moyenne empirique [Correction]

$X \sim \mathcal{N}(50, 4)$. On prend un échantillon de $n = 100$. Soit \bar{X} la moyenne empirique.
a) Loi de \bar{X} ? b) $P(\bar{X} \geq 50, 2)$?

Exercice 11 – TLC pour somme [Correction]

La masse d'une pièce suit $\mathcal{N}(2; 0, 01)$ (kg). On somme $n = 50$ pièces. Soit S la masse totale.
a) Loi approchée de S ? b) $P(S \leq 100, 5)$?

V Intervalles de confiance

Exercice 12 – IC moyenne [Correction]

Sur $n = 100$ pièces, on mesure $\bar{x} = 49, 8$ et $s = 2$. Donner l'IC à 95% de la moyenne réelle μ .

Exercice 13 – IC proportion [Correction]

Sur $n = 400$ produits testés, on observe $f = 0, 12$ de défauts. IC à 95% de la proportion p ?

Exercice 14 – Taille échantillon [Correction]

On veut estimer une proportion avec une précision de $\pm 2\%$ au niveau 95%. En supposant $f \approx 0, 5$, taille minimale ?

VI Tests d'hypothèse

Exercice 15 – Test bilatéral [Correction]

Une chaîne doit produire des pièces de masse moyenne $\mu_0 = 2$ kg. Sur 100 pièces, on a $\bar{x} = 2, 03$ et $s = 0, 1$. Au seuil 5%, peut-on conclure $\mu \neq 2$?

Exercice 16 – Test unilatéral [Correction]

Le taux de défauts annoncé est 5%. Sur $n = 200$, on observe 14 défauts. Au seuil 5%, peut-on rejeter cette an-

nonce (en faveur de $p > 5\%$) ?

Corrections

Correction 1 – Tirage avec remise [Énoncé]

X = nombre de rouges. $X \sim \mathcal{B}(3; 5/12)$. $P(X = 2) = \binom{3}{2}(5/12)^2(7/12) = 3 \times \frac{25}{144} \times \frac{7}{12} = \frac{525}{1728} \approx 0,304$.

Correction 2 – Arbre pondéré [Énoncé]

$P(\text{def}) = 0,3 \times 0,05 + 0,7 \times 0,02 = 0,015 + 0,014 = 0,029$. $P(A|\text{def}) = \frac{0,015}{0,029} \approx 0,517$.

Correction 3 – Tirage sans remise [Énoncé]

$P(\text{aucune def}) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}$. $P(\text{au moins 1}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \approx 0,533$.

Correction 4 – $\mathcal{B}(15; 0,2)$ [Énoncé]

$P(X = 3) = \binom{15}{3}(0,2)^3(0,8)^{12} \approx 0,2501$.
 $P(X \leq 5) \approx 0,9389$.

Correction 5 – Seuil binomiale [Énoncé]

$P(X \geq 1) = 1 - (0,9)^n \geq 0,95 \Leftrightarrow (0,9)^n \leq 0,05 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,05}{\ln 0,9} \approx 28,4$. $n = 29$.

Correction 6 – Industrie [Énoncé]

$X \sim \mathcal{B}(40; 0,05)$. $E(X) = 2$. $P(X \leq 2) \approx 0,6767$.

Correction 7 – Normale directe [Énoncé]

$P(X \leq 53) = P(Z \leq 1,5) \approx 0,9332$. $P(48 \leq X \leq 52) = P(-1 \leq Z \leq 1) \approx 0,6827$.
 $P(X > 55) = P(Z > 2,5) \approx 0,0062$.

Correction 8 – Tolerance [Énoncé]

$P(\text{hors tol}) = 1 - P(19,8 \leq X \leq 20,2)$. $\sigma = 0,1$. $P(-2 \leq Z \leq 2) \approx 0,9545$. Donc $P(\text{hors}) \approx 0,0455$.

Correction 9 – Standardisation [Énoncé]

$P(X \leq 12) = 0,8413 \Rightarrow z_1 = 1 \Rightarrow 12 = \mu + \sigma$. $P(X \leq 8) = 0,1587 \Rightarrow z_2 = -1 \Rightarrow 8 = \mu - \sigma$.
 $\mu = 10$, $\sigma = 2$.

Correction 10 – Moyenne empirique [Énoncé]

$\bar{X} \sim \mathcal{N}(50; 4/100) = \mathcal{N}(50; 0,04)$, $\sigma_{\bar{X}} = 0,2$.
 $P(\bar{X} \geq 50,2) = P(Z \geq 1) \approx 0,1587$.

Correction 11 – Somme TLC [Énoncé]

$S \sim \mathcal{N}(50 \times 2; 50 \times 0,01) = \mathcal{N}(100; 0,5)$, $\sigma = \sqrt{0,5} \approx 0,707$.
 $P(S \leq 100,5) = P(Z \leq 0,707) \approx 0,7602$.

Correction 12 – IC moyenne [Énoncé]

$IC = 49,8 \pm 1,96 \times 2/\sqrt{100} = 49,8 \pm 0,392 = [49,408; 50,192]$.

Correction 13 – IC proportion [Énoncé]

$IC = 0,12 \pm 1,96\sqrt{0,12 \times 0,88/400} = 0,12 \pm 1,96 \times 0,01625 = 0,12 \pm 0,0319 = [0,088; 0,152]$.

Correction 14 – Taille [Énoncé]

$1,96\sqrt{0,5 \times 0,5/n} \leq 0,02 \Leftrightarrow \sqrt{0,25/n} \leq 0,0102 \Leftrightarrow n \geq \frac{0,25}{(0,0102)^2} \approx 2401$.

Correction 15 – Test bilatéral [Énoncé]

$Z = \frac{2,03-2}{0,1/\sqrt{100}} = \frac{0,03}{0,01} = 3 > 1,96$. **On rejette** $H_0 : \mu \neq 2$ au seuil 5%.

Correction 16 – Test unilatéral [Énoncé]

$f = 14/200 = 0,07$. $Z = \frac{0,07-0,05}{\sqrt{0,05 \times 0,95/200}} = \frac{0,02}{0,01541} \approx 1,30$. Seuil unilatéral 5% : $z = 1,645$.
 $1,30 < 1,645$. **On ne rejette pas** H_0 : pas de preuve que $p > 5\%$.