

## Chapitre 6 – Révisions et préparation BTS

BTS MEC • Synthèse complète des deux années + méthodologie  
sous-épreuve E31

### Table des matières

Méthodologie de la sous-épreuve E31 Mathématiques (CCF) .....	1
MEC1 Ch.2 – Fonctions d'une variable réelle .....	1
MEC1 Ch.3 – Calcul intégral .....	2
MEC1 Ch.4 – Équations différentielles .....	2
MEC1 Ch.5 – Statistiques à une variable .....	3
MEC1 Ch.6 – Probabilités & Variables aléatoires discrètes .....	3
MEC2 Ch.1 – Probabilités conditionnelles & Loi binomiale .....	3
MEC2 Ch.2 – Loi normale et théorème central limite .....	4
MEC2 Ch.3 – Statistique inférentielle .....	4
MEC2 Ch.4 – Configurations géométriques .....	4
MEC2 Ch.5 – Calcul vectoriel .....	4
Tableau récapitulatif global .....	5
Stratégies par type d'exercice (annales BTS) .....	5

#### 1 Méthodologie de la sous-épreuve E31 Mathématiques (CCF)

Format de l'évaluation – CCF La sous-épreuve E31 **Mathématiques** (coefficient 2, unité U31) est évaluée en **Contrôle en Cours de Formation (CCF)** : 2 situations d'évaluation, chacune de 55 minutes, notée sur 10 points, coefficient 1.

**1<sup>re</sup> situation** (avant fin 1<sup>re</sup> année ou au plus tard janvier 2<sup>e</sup> année) :

- Calcul et numération ;
- Éléments d'algorithmique et de programmation ;
- Configurations géométriques ;
- Calcul vectoriel ;
- Fonctions d'une variable réelle.

**2<sup>e</sup> situation** (au cours et avant fin 2<sup>e</sup> année) :

- Probabilités 1 ;
- Statistique descriptive ;
- Équations différentielles ;

– Calcul intégral.

Chaque situation comporte 1 ou 2 exercices à difficulté progressive. Logiciels ou calculatrice autorisés.

Une épreuve ponctuelle existe (oral 1h35 : préparation 1h, exposé 15 min, entretien 20 min) pour les candidats hors CCF.

Conseils stratégiques 1. Lire l'intégralité du sujet en début de situation.

2. Rédiger en justifiant chaque étape (informer, chercher, modéliser, raisonner, calculer, communiquer).

3. Utiliser les outils logiciels/calculatrice quand c'est demandé.

4. Encadrer/souligner les résultats finaux et vérifier les arrondis.

5. En cas de blocage, passer (résultats souvent indépendants).

## PREMIÈRE ANNÉE – BTS MEC1

### 2 MEC1 Ch.2 – Fonctions d'une variable réelle

Limites usuelles en  $+\infty$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$ .

**Croissances comparées** (BO) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n > 0).$$

Continuité et dérivation  $f$  continue en  $a$  ssi  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

$f$  dérivable en  $a$  ssi  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  existe (note  $f'(a)$ ).

**Opérations** :  $(u + v)' = u' + v'$ ,  $(uv)' = u'v + uv'$ ,  $(u/v)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ,  $(u \circ v)' = u'(v) \cdot v'$ .

Dérivées usuelles  $(x^n)' = nx^{n-1}$ ;  $(e^x)' = e^x$ ;  $(\ln x)' = 1/x$ ;  $(\cos x)' = -\sin x$ ;  $(\sin x)' = \cos x$ .

$(\sqrt{x})' = 1/(2\sqrt{x})$ ;  $(e^u)' = u' \cdot e^u$ ;  $(\ln u)' = u'/u$ .

Étude de fonction 1. Domaine de définition + parité/périodicité.

2. Limites aux bornes (asymptotes).

3.  $f'(x)$ ; signe de  $f'(x)$ ; tableau de variations.

4. Tableau de signes/valeurs particulières.

5. Tracé de la courbe.

Application Étudier sur  $\mathbb{R}$  :  $f(x) = xe^{-x}$ . Calculer  $f'$ , dresser le tableau de variations, donner la limite en  $+\infty$ .

**Solution** :  $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ . Signe :  $f' \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ . Maximum en 1 :  $f(1) = 1/e$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

### 3 MEC1 Ch.3 – Calcul intégral

Primitive  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  ssi  $F'(x) = f(x)$  pour tout  $x \in I$ . Toute primitive de  $f$  est de la forme  $F(x) + C$ .

Primitives usuelles  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  ( $n \neq -1$ );  $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ;  $\int e^x dx = e^x + C$ .

$\int \cos x dx = \sin x + C$ ;  $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .

$\int u'(x) e^{u(x)} dx = e^{u(x)} + C$ ;  $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$ .

Intégrale définie  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  avec  $F$  primitive de  $f$ .

**Aire** : si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$ ,  $\int_a^b f =$  aire entre courbe et axe  $Ox$ .

Propriétés **Linéaire** :  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ .

**Chasles** :  $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ .

**Ordre** : si  $f \leq g$  sur  $[a, b]$ ,  $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ .

**Moyenne** : si  $m \leq f \leq M$  sur  $[a, b]$ ,  $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$ .

Intégration par parties (IPP)  $\int_a^b u' v dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv' dx$ .

**Choix** : prendre  $u'$  qui s'intègre facilement,  $v$  qui se dérive simplement (souvent :  $v =$  polynôme ou  $\ln$ ).

Application Calculer  $I = \int_0^1 (3x^2 + 2) dx$  et  $J = \int_1^2 \frac{dx}{x}$ .

**Solution** :  $I = [x^3 + 2x]_0^1 = 3$ .  $J = [\ln x]_1^2 = \ln 2 \approx 0,693$ .

#### 4 MEC1 Ch.4 – Équations différentielles

Équa diff linéaire ordre 1 **Forme** :  $a(x)y' + b(x)y = c(x)$  ( $a$  ne s'annule pas).

**Équation sans second membre** (homogène)  $a(x)y' + b(x)y = 0$  :

$y_0(x) = Ke^{-G(x)}$  avec  $G$  primitive de  $b/a$ ,  $K \in \mathbb{R}$ .

**Solution générale** :  $y = y_0 + y_p$  ou  $y_p$  est une solution particulière de l'équation complète.

Cas à coefficients constants ordre 1  $y' + ay = f(x)$  :  $y_0 = Ke^{-ax}$ .

$y_p$  : selon  $f$  : si  $f$  polynôme de degré  $n$ , chercher  $y_p$  polynôme de degré  $n$ ; si  $f = \alpha e^{rx}$  avec  $r \neq -a$ , chercher  $y_p = \beta e^{rx}$ .

Équa diff linéaire ordre 2 à coeff constants **Forme** :  $ay'' + by' + cy = f(x)$ .

**Équation caractéristique** :  $ar^2 + br + c = 0$ , discriminant  $\Delta$ .

–  $\Delta > 0$  : 2 racines  $r_1 \neq r_2$ ;  $y_0 = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$ .

–  $\Delta = 0$  : racine double  $r$ ;  $y_0 = (A + Bx)e^{rx}$ .

–  $\Delta < 0$  : 2 racines complexes  $r = \alpha \pm i\beta$ ;  $y_0 = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ .

Solution générale :  $y = y_0 + y_p$  avec  $y_p$  trouvée par essai (polynôme, exponentielle, sinusoidale).

Conditions initiales Les constantes  $K, A, B$  sont déterminées par les conditions  $y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta$ .

Application Résoudre  $y' - 3y = 0$  avec  $y(0) = 2$ .

**Solution** :  $y_0 = Ke^{3x}$ .  $y(0) = K = 2$ . Solution :  $y(x) = 2e^{3x}$ .

#### 5 MEC1 Ch.5 – Statistiques à une variable

Tableau d'effectifs et fréquences Pour une série  $X$  de valeurs  $x_i$  avec effectifs  $n_i$  ( $i = 1, \dots, p$ , total  $N = \sum n_i$ ) :

**Fréquence** :  $f_i = \frac{n_i}{N}$ ;  $\sum f_i = 1$ .

Caractéristiques de position **Mode** : valeur ayant l'effectif maximal.

**Médiane** : valeur partageant la série en deux (50% inférieurs, 50% supérieurs).

**Moyenne** :  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum n_i x_i = \sum f_i x_i$ .

**Quartiles** :  $Q_1, Q_2 =$  médiane,  $Q_3$ . Écart interquartile :  $Q_3 - Q_1$ .

Caractéristiques de dispersion **Étendue** :  $\max - \min$ .

**Variance** :  $V(X) = \frac{1}{N} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2$  (Koenig).

**Écart-type** :  $\sigma = \sqrt{V}$ .

**Coefficient de variation** :  $CV = \sigma/\bar{x}$ .

Représentations graphiques **Diagramme en bâtons** (caractère discret); **histogramme** (caractère continu, classes); **boîte à moustaches** (médiane + quartiles + min/max).

Application Série 5, 7, 8, 8, 9, 10, 11, 12, 12, 18. Calculer  $\bar{x}$ , médiane,  $V, \sigma$ .

**Solution** :  $\bar{x} = 10$ . Médiane = 9,5.  $\sum x_i^2 = 1156$ .  $V = 15,6$ .  $\sigma \approx 3,95$ .

#### 6 MEC1 Ch.6 – Probabilités & Variables aléatoires discrètes

Probabilités élémentaires (rappels)  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ; probabilités totales :  $P(A) = \sum P_{B_i}(A)P(B_i)$ ; indépendance :  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

Loi de probabilité, espérance VA discrète  $X$  : valeurs  $x_i$  avec  $p_i = P(X = x_i) \geq 0, \sum p_i = 1$ .

$$E(X) = \sum x_i p_i; V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \text{ (Koenig)}; \sigma = \sqrt{V}.$$

$$\text{Affine : } E(aX + b) = aE(X) + b, V(aX + b) = a^2V(X).$$

Loi	$P(X = k)$	$E(X)$	$V(X)$
Lois discrètes usuelles $\mathcal{B}(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$np$	$np(1-p)$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$\lambda$	$\lambda$

**Approximation :**  $\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{P}(np)$  si  $n \geq 30, p \leq 0,1, np \leq 10$ .

Application  $X \sim \mathcal{B}(20; 0,15)$ . Calculer  $E(X), \sigma(X), P(X = 3), P(X \leq 5)$ .

**Solution :**  $E(X) = 3, \sigma \approx 1,597. P(X = 3) \approx 0,2428. P(X \leq 5) \approx 0,9327$ .

## DEUXIÈME ANNÉE – BTS MEC2

### 7 MEC2 Ch.1 – Probabilités conditionnelles & Loi binomiale

Synthèse probabilités conditionnelles  $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ; arbre pondéré; probabilités totales; Bayes:  $P_A(B) = \frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}$ .

Loi binomiale (rappel)  $X \sim \mathcal{B}(n, p): P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}; E(X) = np, V(X) = np(1-p)$ .

**4 conditions :**  $n$  épreuves identiques, 2 issues, indépendantes,  $X = nb$  succès.

Application Atelier  $A_1$  (60%, 2% défaut),  $A_2$  (40%, 5%). Une pièce est défectueuse,  $P(A_1)$ ?

**Solution :**  $P(\text{def}) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,032. P(A_1 | \text{def}) = 0,012/0,032 = 0,375$ .

### 8 MEC2 Ch.2 – Loi normale et théorème central limite

Loi normale  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ : courbe en cloche centrée en  $\mu$ , dispersion  $\sigma$ .

**Standardisation :**  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Intervalles clés :**  $P(|X - \mu| \leq \sigma) \approx 0,683; \leq 2\sigma \approx 0,954; \leq 3\sigma \approx 0,997$ .

Théorème central limite (TLC)  $X_1, \dots, X_n$  iid d'espérance  $\mu$  et écart-type  $\sigma$ . Pour  $n \geq 30$ :

$$\bar{X}_n \approx \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right); S_n \approx \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2).$$

Application  $X \sim \mathcal{N}(50; 16), \sigma = 4$ . Calculer  $P(46 \leq X \leq 56)$  et  $P(X \geq 60)$ .

**Solution :**  $Z = (X - 50)/4. P(46 \leq X \leq 56) = P(-1 \leq Z \leq 1,5) \approx 0,7745. P(X \geq 60) = P(Z \geq 2,5) \approx 0,0062$ .

### 9 MEC2 Ch.3 – Statistique inférentielle

Intervalle de confiance **Moyenne :**  $IC = \bar{x} \pm t_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$ .

**Proportion :**  $IC = f \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$ .

**Niveaux :** 95%  $\rightarrow t = 1,96; 99\% \rightarrow t = 2,576$ .

Test d'hypothèse 1.  $H_0$  vs  $H_1$ .

2. Sous  $H_0$ , loi de la statistique de test (souvent  $\mathcal{N}(0, 1)$  via TLC).

3. Région critique selon  $\alpha$  (uni- ou bilatéral).

4. Décision : rejet ou non de  $H_0$ .

Application Sur  $n = 100, \bar{x} = 12, s = 2$ . IC à 95% de  $\mu$ ?

**Solution :**  $IC = 12 \pm 1,96 \times 2/10 = 12 \pm 0,392 = [11,608; 12,392]$ .

## 10 MEC2 Ch.4 – Configurations géométriques

Trigonométrie  $\theta_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} \theta_{\text{deg}}$ ;  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ .

Valeurs remarquables à connaître :  $0, \pi/6, \pi/4, \pi/3, \pi/2$ .

Triangle quelconque **Al-Kashi** :  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ .

**Loi des sinus** :  $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$ .

**Aire** :  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$ .

**Médiane** :  $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$ .

Application Triangle  $a = 8, b = 10, \hat{C} = 70^\circ$ . Calculer  $c$  par Al-Kashi.

**Solution** :  $c^2 = 64 + 100 - 160 \cos 70^\circ \approx 109,28$ .  $c \approx 10,45$ .

## 11 MEC2 Ch.5 – Calcul vectoriel

Produit scalaire (2D et 3D) **Cosinus** :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}\vec{v} \cos(\vec{u}, \vec{v})$ .

**Coordonnées 2D** :  $xx' + yy'$ ; **3D** :  $xx' + yy' + zz'$ .

**Polarisation** :  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ .

**Orthogonalité** :  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

Équations cartésiennes **Droite (2D)** :  $ax + by + c = 0$ , normal  $ab$ , directeur  $-ba$ .

**Cercle** :  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ .

**Plan (3D)** :  $ax + by + cz + d = 0$ , normal  $(a; b; c)$ .

**Distance point-plan** :  $d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .

Application  $\vec{u}(3; -2; 1), \vec{v}(1; 4; 5)$ . Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}, \vec{u}, \vec{v}$ , conclure.

**Solution** :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - 8 + 5 = 0$ . **Orthogonaux!**  $\vec{u} = \sqrt{14}, \vec{v} = \sqrt{42}$ .

## 12 Tableau récapitulatif global

Chap.	Thème	Formule clé
<i>Première année – MEC1</i>		
2	Fonctions	$f'$ , étude, croissances comparées
3	Calcul intégral	$\int_a^b f = F(b) - F(a)$ , IPP
4	Équa diff	$y' + ay = 0 \Rightarrow y = Ke^{-ax}$ ; ordre 2 : eq. caract.
5	Stat 1 var	$\bar{x}, V, \sigma$ (Koenig)
6	VA discrètes	$\mathcal{B}(n, p), \mathcal{P}(\lambda)$
<i>Deuxième année – MEC2</i>		
1	Probas + binomiale	$E = np, V = np(1 - p)$
2	Loi normale + TLC	$Z = (X - \mu)/\sigma, \bar{X}_n \rightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$
3	Stat inférentielle	$IC = f \pm 1,96\sqrt{f(1-f)/n}$
4	Configurations	Al-Kashi, sinus, $\mathcal{A} = \frac{1}{2} ab \sin C$
5	Vecteurs	$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ , polarisation

## 13 Stratégies par type d'exercice (annales BTS)

Type 1 – Probabilités + Loi binomiale 2. Calcul à la calculatrice (binomFRep).

3. Éventuellement : approximation Poisson si  $n \geq 30, p \leq 0,1$ .

Type 2 – Loi normale + TLC + IC 1. Lire  $\mu, \sigma$ .

2. Standardiser si nécessaire.

3. Pour la moyenne :  $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ .

4. IC moyenne :  $\bar{x} \pm 1,96 s/\sqrt{n}$ .

5. Test : statistique  $Z$ , région critique, conclusion.

Type 3 – Équations différentielles 1. Identifier ordre + forme.

2. Solution sans 2nd membre.

3. Solution particulière par essai.

4. Solution générale.

5. Conditions initiales.

Type 4 – Calcul intégral / IPP 1. Reconnaître primitives :  $\int u'/u$ ,  $\int u' e^u$ , etc.

2. IPP : choisir  $u'$ ,  $v$ .

3. Aire : signe de  $f$ , découpage.

Type 5 – Configurations + vecteurs 1. Schéma clair.

2. Al-Kashi / sinus / produit scalaire.

3. Coordonnées pour distance, orthogonalité, aire.