

Planche 2 – Plans, droites, produit vectoriel

BTS MEC2 • Ch.5 • Équations de plans, paramétriques de droites, produit vectoriel et applications

I Plans de l'espace

Exercice 1 – Équation par point + normale [Correction]

Plan passant par $A(1; 2; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – Autre [Correction]

Plan passant par $A(-1; 0; 5)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 – Plan par 3 points [Correction]

Équation du plan (ABC) avec $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$.

Exercice 4 – Idem [Correction]

Équation du plan (ABC) avec $A(2; 1; 1)$, $B(3; 2; -1)$, $C(0; 3; 2)$.

Exercice 5 – Appartenance [Correction]

Le point $M(2; -1; 3)$ appartient-il au plan $2x - y + z - 8 = 0$?

Exercice 6 – Distance point-plan [Correction]

Calculer la distance du point $M(1; 2; 3)$ au plan $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 5 = 0$.

Exercice 7 – Distance (autre) [Correction]

Distance de $M(0; 0; 0)$ à $\mathcal{P} : 3x + 4y - 12z + 26 = 0$.

Exercice 8 – Plans parallèles [Correction]

$\mathcal{P}_1 : 2x - 3y + z - 5 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : 4x - 6y + 2z + 1 = 0$: parallèles, sécants ou confondus?

II Droites paramétriques

Exercice 9 – Par point + directeur [Correction]

Représentation paramétrique de d passant par $A(1; -2; 3)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 – Par 2 points [Correction]

Représentation paramétrique de (AB) avec $A(0; 1; 2)$, $B(3; -1; 4)$.

Exercice 11 – Appartenance sur droite [Correction]

$d : \{x = 1 + 2t, y = 3 - t, z = 2t\}$. Les points $P(5; 1; 4)$, $Q(3; 2; 2)$, $R(7; 0; 6)$ appartiennent-ils à d ?

Exercice 12 – Interseq. droite-plan [Correction]

$d : \{x = t, y = 2 - t, z = 3 + t\}$; $\mathcal{P} : x + y - z + 4 = 0$. Intersection?

Exercice 13 – Droite \perp à un plan [Correction]

Représentation paramétrique de la droite passant par $A(2; -1; 0)$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P} : 3x - y + 2z - 4 = 0$.

Exercice 14 – Projeté orthogonal [Correction]

Projeté orthogonal du point $M(1; 2; 3)$ sur le plan $\mathcal{P} : x + y + z = 0$.

III Produit vectoriel

Exercice 15 – Calcul direct [Correction]

Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour :

- $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 16 – Propriétés [Correction]

Montrer que $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{u} \wedge (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Exercice 17 – Vérification orthogonalité [Correction]

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} .

Exercice 18 – Vec. normal par PV [Correction]

Plan (ABC) avec $A(0; 0; 0)$, $B(1; 2; 0)$, $C(3; 1; 2)$. Utiliser $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ pour donner un vecteur normal, puis l'équation du plan.

IV Aires et volumes

Exercice 19 – Aire parallélogramme [Correction]

Parallélogramme construit sur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Aire ?

Exercice 20 – Aire triangle 3D [Correction]

Triangle ABC avec $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 4)$. Aire ?

Exercice 21 – Volume parallélépipède [Correction]

Parallélépipède construit sur $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Volume ?

Exercice 22 – Volume tétraèdre [Correction]

Tétraèdre de sommets $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 2; 0)$, $D(0; 0; 3)$. Volume ?

VI Entraînement Tale Spé – équations de plans

Exercice 28 – Équation plan (pt + normale) [Correction]

Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P} passant par $A(2; -1; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 29 – Appartenance à un plan [Correction]

Soit $\mathcal{P} : 2x - 3y + z - 5 = 0$.

1. Le point $M(4; 1; 0)$ appartient-il à \mathcal{P} ?
2. Le point $N(3; -1; 2)$ appartient-il à \mathcal{P} ?
3. Donner un vecteur normal à \mathcal{P} .

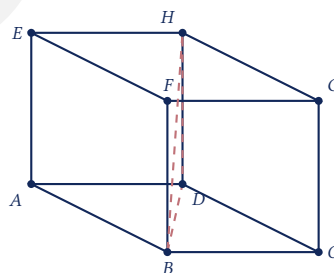
Exercice 30 – Distance d'un point à un plan [Correction]

Calculer la distance du point $M(1; 4; -2)$ au plan $\mathcal{P} : 2x - y + 2z + 6 = 0$. Commenter le résultat.

Exercice 31 – Cube – plan (BDH) [Correction]

Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, on travaille dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

1. Donner les coordonnées des 8 sommets.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (BDH) .
3. Le point F appartient-il à ce plan ?



V Applications BTP

Exercice 23 – Toiture 4 pans [Correction]

Base $ABCD$ carrée de côté 8 m au sol. Faîtage $F(4; 4; 5)$ au centre. Aire totale des 4 pans triangulaires ?

Exercice 24 – Panneau solaire [Correction]

Panneau rectangulaire de sommets $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 3)$, $C(3; 2; 3)$, $D(0; 2; 2)$. Aire ?

Exercice 25 – Angle d'inclinaison [Correction]

Une pente de toit est représentée par le plan $\mathcal{P} : x + 3z - 6 = 0$. Quel est l'angle que fait ce toit avec l'horizontale (plan $z = 0$) ?

Exercice 26 – Béton d'un coffrage [Correction]

Coffrage trapèze droit : arêtes $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Volume ? Béton nécessaire à $2,4 \text{ t/m}^3$?

Exercice 27 – Distance conduite-mur [Correction]

Une conduite passe par $M(1; 2; 3)$, de direction $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Un mur plan : $x - y + 2z - 5 = 0$.

1. La conduite coupe-t-elle le mur ?
2. Si oui, à quel point ?

Corrections – Planche 2

Correction 1 – Équation par point + normale [Énoncé]

$$2(x-1) - 1(y-2) + 4(z-3) = 0 \iff 2x - y + 4z - 12 = 0.$$

Correction 2 – Autre [Énoncé]

$$1(x+1) + 1(y-0) + 1(z-5) = 0 \iff x + y + z - 4 = 0.$$

Correction 3 – Plan par 3 points [Énoncé]

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{Équation : } 6(x-1) + 3y + 2z = 0 \iff 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

Correction 4 – Idem [Énoncé]

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{Équation : } 5(x-2) + 3(y-1) + 4(z-1) = 0 \iff 5x + 3y + 4z - 17 = 0.$$

Correction 5 – Appartenance [Énoncé]

$$2 \cdot 2 - (-1) + 3 - 8 = -2 \neq 0 : M \notin \mathcal{P}.$$

Correction 6 – Distance point-plan [Énoncé]

$$d = \frac{|1 - 4 + 6 - 5|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|-2|}{3} = \frac{2}{3}.$$

Correction 7 – Distance (autre) [Énoncé]

$$d = \frac{|0 + 0 + 0 + 26|}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = \frac{26}{13} = 2.$$

Correction 8 – Plans parallèles [Énoncé]

Normales $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$: colinéaires, plans parallèles. $\mathcal{P}_2 : 2\mathcal{P}_1 ? 2(2x - 3y + z - 5) = 4x - 6y + 2z - 10 \neq 4x - 6y + 2z + 1$. Plans **strictement parallèles**.

Correction 9 – Par point + directeur [Énoncé]

$$\{x = 1 + 2t, y = -2 + t, z = 3 - t\}.$$

Correction 10 – Par 2 points [Énoncé]

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \{x = 3t, y = 1 - 2t, z = 2 + 2t\}.$$

Correction 11 – Appartenance sur droite [Énoncé]

Pour $P(5; 1; 4) : 1 + 2t = 5 \Rightarrow t = 2 ; 3 - 2 = 1 ; 2 \cdot 2 = 4 . P \in d$. Pour $Q(3; 2; 2) : 1 + 2t = 3 \Rightarrow t = 1 ; 3 - 1 = 2 ; 2 \cdot 1 = 2 . Q \in d$. Pour $R(7; 0; 6) : 1 + 2t = 7 \Rightarrow t = 3 ; 3 - 3 = 0 ; 2 \cdot 3 = 6 . R \in d$.

Correction 12 – Intersection droite-plan [Énoncé]

Substitution : $t + (2 - t) - (3 + t) + 4 = t + 2 - t - 3 - t + 4 = -t + 3 = 0 \iff t = 3$. Point : $(3; -1; 6)$.

Correction 13 – Droite \perp à un plan [Énoncé]

$$\text{Directeur} = \text{normale} : \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \{x = 2 + 3t, y = -1 - t, z = 2t\}.$$

Correction 14 – Projeté orthogonal [Énoncé]

Droite par $M \perp \mathcal{P} : \{x = 1 + t, y = 2 + t, z = 3 + t\}$. Substitution dans $\mathcal{P} : (1 + t) + (2 + t) + (3 + t) = 0 \iff 3t + 6 = 0 \iff t = -2 . H(-1; 0; 1)$.

Correction 15 – Calcul direct (produit vectoriel) [Énoncé]

$$(a) \vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. (b) \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ -7 \end{pmatrix}. (c) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Correction 16 – Propriétés [Énoncé]

$\vec{u} \wedge \vec{u}$: composantes $yz - zy = 0$, etc. Tout nul. $\vec{u} \wedge (-\vec{u}) = -\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

Correction 17 – Vérification orthogonalité [Énoncé]

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}. \vec{u} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 8 - 3 - 5 = 0. \vec{v} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) = 4 - 9 + 5 = 0.$$

Correction 18 – Vec. normal par PV [Énoncé]

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}. \text{Plan par } A(0; 0; 0) : 4x - 2y - 5z = 0.$$

Correction 19 – Aire parallélogramme [Énoncé]

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}. \text{Aire} = 12.$$

Correction 20 – Aire triangle 3D [Énoncé]

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \wedge = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}. \text{Norme} = \sqrt{144 + 64 + 36} = \sqrt{244}. \text{Aire} = \frac{1}{2} \sqrt{244} = \sqrt{61} \approx 7,81.$$

Correction 21 – Volume parallélépipède [Énoncé]

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}. V = |\vec{w}| = |0 + 0 + 24| = 24.$$

Correction 22 – Volume tétraèdre [Énoncé]

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1.$$

Correction 23 – Toiture 4 pans [Énoncé]

4 triangles ABF, BCF, CDF, DAF avec $F(4; 4; 5)$ centre sur base 8×8 . Par symétrie, 2 paires

d'aires égales. Calcul pour ABF : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\wedge = \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \\ 32 \end{pmatrix}$, aire = $\frac{1}{2} \sqrt{1600 + 1024} \approx$

25,6 m². Idem CDF . Pour BCF : $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BF} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$; aire $\approx 25,6$ m². Total $\approx 102,4$ m².

Correction 24 – Panneau solaire [Énoncé]

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \wedge = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}. \text{Aire} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,32 \text{ m}^2.$$

Correction 25 – Angle d'inclinaison [Énoncé]

Normale au toit $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, normale horizontale $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0,949$, $\theta \approx 18,4^\circ$. Angle avec horizontale = $90^\circ - 18,4^\circ = 71,6^\circ$ (correction : l'angle d'inclinaison c'est l'angle entre la pente et l'horizontale, donc $\arctan(1/3) \approx 18,4^\circ$).

Correction 26 – Béton d'un coffrage [Énoncé]

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}. V = |0 + 0 + 30| = 30 \text{ m}^3. \text{Béton} : 30 \times 2,4 = 72 \text{ t.}$$

Correction 27 – Distance conduite-mur [Énoncé]

Normale plan $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 + 1 + 2 = 5 \neq 0$: la conduite coupe le mur. Substitution : $(1 + 2t) - (2 - t) + 2(3 + t) - 5 = 1 + 2t - 2 + t + 6 + 2t - 5 = 5t + 0 = 0 \iff t = 0$. Point d'intersection : $(1; 2; 3) = M$ lui-même ! Donc M est sur le mur.

Correction 28 – Équation plan (pt + normale) [Énoncé]

$$x - 2y + 4z - 16 = 0 \text{ (détail : } 1(x - 2) - 2(y + 1) + 4(z - 3) = x - 2y + 4z - 16 = 0).$$

Correction 29 – Appartenance à un plan [Énoncé]

$$1. 8 - 3 + 0 - 5 = 0 : M \in \mathcal{P}. 2. 6 + 3 + 2 - 5 = 6 \neq 0 : N \notin \mathcal{P}. 3. \text{Vecteur normal : } \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Correction 30 – Distance d'un point à un plan [Énoncé]

$$d = \frac{|2 - 4 - 4 + 6|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{0}{3} = 0. \text{ Donc } M \text{ est sur le plan.}$$

Correction 31 – Cube – plan (BDH) [Énoncé]

Coord. : $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $E(0; 0; 1)$, $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$, $H(0; 1; 1)$.

$$\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \vec{n} = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Équation par } B(1; 0; 0) : x + y - 1 = 0. \text{ Test}$$

$$F(1; 0; 1) : 1 + 0 - 1 = 0 : F \in (BDH).$$