Planche 1 — Produit scalaire

BTS MEC2 • Ch.5 • Produit scalaire plan et espace, orthogonalité, angles

I Calcul de produit scalaire (plan)

Exercice 1 — Par coordonnées [Correction]

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pour :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

Exercice 2 — Par angle et normes [Correction]

$\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 3$. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ selon :

a) $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = 0°$

b) $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = 60°$

c) $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = 90°$

d) $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = 120°$

e) $\widehat{(\vec{u},\vec{v})} = 180°$

Exercice 3 — Orthogonalité [Correction]

Les vecteurs sont-ils orthogonaux ?

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$

Exercice 4 — Triangle rectangle [Correction]

$A(0;0)$, $B(4;3)$, $C(3;-4)$. Montrer que ABC est rectangle et isocèle.

Exercice 5 — Angle par cosinus [Correction]

Déterminer l'angle entre $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ (au degré près).

II Produit scalaire (espace)

Exercice 6 — Coordonnées 3D [Correction]

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pour :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Exercice 7 — Orthog. 3D [Correction]

Déterminer k pour que $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\k\\2\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

Exercice 8 — Angle 3D [Correction]

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$. Calculer l'angle formé (en degrés, arrondi au dixième).

Exercice 9 — Nature triangle [Correction]

$A(1;1;1)$, $B(2;3;-1)$, $C(-1;2;0)$. Calculer AB, BC, CA. Le triangle est-il équilatéral ? rectangle ?

Exercice 10 — Distance, milieu [Correction]

$A(3;-2;5)$, $B(1;4;-3)$. Calculer le milieu de $[AB]$ et la distance AB.

III Normes

Exercice 11 — Norme 2D [Correction]

Calculer $\|\vec{u}\|$ pour : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 12 — Norme 3D [Correction]

Calculer $\|\vec{u}\|$ pour : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 13 — Vecteur unitaire [Correction]

Normaliser $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ (vecteur même direction de norme 1).

VI Entraînement Tale Spé — calculs & automatismes

Exercice 22 — Colinéarité (QCM) [Correction]

Pour chaque paire, les vecteurs sont-ils colinéaires ?

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-6\\9\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

d) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$

Exercice 23 — Vecteur directeur (QCM) [Correction]

Pour $d : \{x = -1 + 2k,\ y = 3 + k,\ z = -3k\}$, un vecteur directeur est : ○ $\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$ ○ $\begin{pmatrix}1\\4\\-3\end{pmatrix}$

Exercice 24 — Droites parall. ou sécantes [Correction]

$d : \{x = 1-2k,\ y = 2+k,\ z = 3k\}$ et $d' : \{x = 2-4t,\ y = -2t,\ z = -1+t\}$.

1. Sont-elles parallèles ?
2. Si non, ont-elles un point commun ? Conclure.

Exercice 25 — Alignement [Correction]

$A(1;2;3)$, $B(4;-1;0)$, $C(7;-4;-3)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Les points sont-ils alignés ?

Exercice 26 — PS par coordonnées [Correction]

Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ pour :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Exercice 27 — Orthogonalité + paramètre [Correction]

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\k\\-4\end{pmatrix}$. Déterminer k pour que $\vec{u}\perp\vec{v}$.

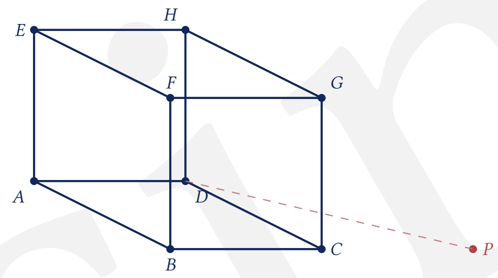
Exercice 28 — Angle entre 2 vecteurs [Correction]

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ et les normes.
2. En déduire l'angle au dixième de degré.

Exercice 29 — Cube et alignement [Correction]

Dans le cube $ABCDEFGH$, P est le symétrique de D par rapport à C. Démontrer que P appartient au plan (BEG) à l'aide des coordonnées dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Exercice 30 — Python : paramétrique [Correction]

Analyser l'algorithme suivant. Que calcule-t-il ?

```python
def parametrique(xA, yA, zA, xB, yB, zB):
    # Calcule les paramètres pour la représentation
    # paramétrique de la droite (AB)
    alpha = xB - xA
    beta  = yB - yA
    gamma = zB - zA
    print(f"d : x = {xA} + {alpha}*t")
    print(f"    y = {yA} + {beta}*t")
    print(f"    z = {zA} + {gamma}*t")
    return (alpha, beta, gamma)

# Test
parametrique(1, 2, -3, 4, 0, 1)
```

Que renvoie le test ? Écrire la représentation paramétrique obtenue.

IV Applications concrètes

Exercice 14 — Charpente [Correction]

Deux pannes : $\vec{p}_1\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{p}_2\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}$. Sont-elles orthogonales ?

Exercice 15 — Câbles de pont [Correction]

Deux câbles $\vec{c}_1\begin{pmatrix}4\\3\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{c}_2\begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}$. Calculer l'angle entre les câbles (degré).

Exercice 16 — Triangle levé topo [Correction]

Trois repères de levé topographique : $A(2;1;0)$, $B(7;3;0)$, $C(5;6;0)$.

1. Le triangle est-il rectangle ?
2. Calculer son aire par la formule classique.

Exercice 17 — Toiture à 2 pans [Correction]

Un toit à 2 pans : le faîtage va de $F_1(0;0;4)$ à $F_2(10;0;4)$. Les bords bas sont $B_1(0;-3;2)$ et $B_2(10;-3;2)$. Le pan est un rectangle. Calculer sa surface (via $\|\overrightarrow{F_1B_1}\| \times \|\overrightarrow{F_1F_2}\|$).

Exercice 18 — Perpendicularité [Correction]

Une poutre : $\vec{p}\begin{pmatrix}5\\0\\-2\end{pmatrix}$. Un solive : $\vec{s}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$. La solive est-elle perpendiculaire à la poutre ?

V Questions de synthèse

Exercice 19 — Identités [Correction]

Démontrer que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Exercice 20 — Médiane [Correction]

Dans un triangle ABC, M est le milieu de $[BC]$. Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Exercice 21 — Hauteur d'un triangle [Correction]

$A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. Calculer la distance du point A à la droite (BC) (projeté orthogonal).

Corrections — Planche 1

Correction 1 — Produit scalaire par coordonnées (plan) [Énoncé]

(a) $3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 = 12 - 10 = 2$.
(b) $-1 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = -6 + 8 = 2$.
(c) $0 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 = -3$.

Correction 2 — Par angle et normes [Énoncé]

$\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| = 15$. (a) $15\cos 0^\circ = 15$. (b) $15 \cdot 0{,}5 = 7{,}5$. (c) $15 \cdot 0 = 0$. (d) $15 \cdot (-0{,}5) = -7{,}5$. (e) $15 \cdot (-1) = -15$.

Correction 3 — Orthogonalité [Énoncé]

(a) $-12 + 12 = 0$: **orthogonaux**. (b) $-10 + 10 = 0$: **orthogonaux**. (c) $6 - 6 = 0$: **orthogonaux**.

Correction 4 — Triangle rectangle [Énoncé]

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 - 12 = 0$: $\widehat{A}$ droit. $AB = 5$, $AC = 5$: isocèle. Donc rectangle isocèle en A.

Correction 5 — Angle par cosinus [Énoncé]

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 - 2 = 4$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{13}$. $\cos\theta = \dfrac{4}{\sqrt{65}} \approx 0{,}496$, $\theta \approx 60{,}3^\circ$.

Correction 6 — PS 3D par coordonnées [Énoncé]

(a) $4 - 2 - 3 = -1$. (b) $0 - 3 - 8 = -11$. (c) $-2 + 0 + 2 = 0$.

Correction 7 — Orthog. 3D [Énoncé]

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - k + 6 = 8 - k = 0 \Rightarrow k = 8$.

Correction 8 — Angle 3D [Énoncé]

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 + 2 + 4 = 8$. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 3$. $\cos\theta = \frac{8}{9} \approx 0{,}889$, $\theta \approx 27{,}3^\circ$.

Correction 9 — Triangle [Énoncé]

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$: $AB = 3$. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$: $BC = \sqrt{11} \approx 3{,}32$. $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$: $CA = \sqrt{6} \approx 2{,}45$. Non équilatéral. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 2$, ni rectangle.

Correction 10 — Distance, milieu [Énoncé]

Milieu : $I(2; 1; 1)$. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\6\\-8\end{pmatrix}$: $AB = \sqrt{104} = 2\sqrt{26} \approx 10{,}2$.

Correction 11 — Norme 2D [Énoncé]

$\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 13$, $\|\vec{w}\| = 7$.

Correction 12 — Norme 3D [Énoncé]

$\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 7$, $\|\vec{w}\| = 5$.

Correction 13 — Vecteur unitaire [Énoncé]

$\|\vec{u}\| = 5$: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix}$. $\|\vec{v}\| = 3$: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Correction 14 — Charpente [Énoncé]

$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 0 + 0 - 6 = -6 \neq 0$: **non orthogonales**.

Correction 15 — Câbles de pont [Énoncé]

$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = 48 + 12 + 36 = 96$. $\|\vec{c}_1\| = \|\vec{c}_2\| = 13$. $\cos\theta = \frac{96}{169} \approx 0{,}568$, $\theta \approx 55{,}4^\circ$.

Correction 16 — Triangle levé topo [Énoncé]

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\5\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 15+10+0 = 25 \neq 0$: non rectangle en A. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -5\cdot(-2)+(-2)\cdot 3 = 10-6 = 4 \neq 0$. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-3)\cdot 2+(-5)\cdot(-3) = -6+15 = 9 \neq 0$: non rectangle. Aire avec produit vectoriel $\begin{pmatrix}0\\0\\19\end{pmatrix}$: $\mathscr{A} = \frac{19}{2} = 9{,}5 \text{ m}^2$.

Correction 17 — Toiture à 2 pans [Énoncé]

$\overrightarrow{F_1B_1}\begin{pmatrix}0\\-3\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{F_1F_2}\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$. Le pan est bien un rectangle (côtés orthogonaux). $\left\|\overrightarrow{F_1B_1}\right\| = \sqrt{13}$, $\left\|\overrightarrow{F_1F_2}\right\| = 10$. Surface $= 10\sqrt{13} \approx 36{,}1 \text{ m}^2$.

Correction 18 — Perpendicularité [Énoncé]

$\vec{p}\cdot\vec{s} = 0+0+0 = 0$. Oui, orthogonales.

Correction 19 — Identités [Énoncé]

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$.

Correction 20 — Médiane [Énoncé]

M milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

Correction 21 — Hauteur d'un triangle [Énoncé]

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$. Projeté de A sur (BC) : $t = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2} = \frac{1}{2}$. $H = B+t\overrightarrow{BC} = (0;0{,}5;0{,}5)$. Distance $AH = \sqrt{1+0{,}25+0{,}25} = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}22$.

Correction 22 — Colinéarité (QCM) [Énoncé]

(a) non. (b) oui ($k = -1/3$). (c) oui ($k = 1/2$). (d) non.

Correction 23 — Vecteur directeur (QCM) [Énoncé]

Directeur initial $\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$. $\vec{v} = 2\cdot$directeur (OUI). $\vec{w} = -1\cdot$directeur (OUI). $\vec{u}$ et $\vec{t}$ non proportionnels.

Correction 24 — Droites parall. ou sécantes [Énoncé]

Directeurs $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-4\\-2\\1\end{pmatrix}$: non colinéaires, non parallèles. Résolution 2 équations : $t = -5/7$, $k = -4/7$; vérification 3$^{\text{e}}$ équation KO $\longrightarrow$ **non coplanaires**.

Correction 25 — Alignement [Énoncé]

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-6\\-6\end{pmatrix} = 2\overrightarrow{AB}$: **alignés**.

Correction 26 — PS par coordonnées [Énoncé]

(a) $4+0-6 = -2$. (b) $-6-2+5 = -3$. (c) $2-1-1 = 0$ (orthogonaux).

Correction 27 — Orthogonalité + paramètre [Énoncé]

$2-k-12 = 0 \Rightarrow k = -10$.

Correction 28 — Angle entre 2 vecteurs [Énoncé]

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2+2-4 = 0$. Vecteurs **orthogonaux** : $\theta = 90{,}0°$.

Correction 29 — Cube et alignement [Énoncé]

Coordonnées dans $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$: $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $C(1;1;0)$. P symétrique de D par rapport à C : $P(2;1;0)$. $E(0;0;1)$, $G(1;1;1)$. Équation du plan (BEG) : vecteurs $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Produit vectoriel $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Plan : $-1(x-1)+1\cdot y-1\cdot z = 0 \iff -x+y-z+1 = 0 \iff x-y+z = 1$. Test de $P(2;1;0)$: $2-1+0 = 1$. Donc $P \in (BEG)$.

Correction 30 — Script Python — paramétrique [Énoncé]

Le script calcule la représentation paramétrique de (AB). Pour $A(1;2;-3)$, $B(4;0;1)$: $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 4$. Représentation : $\{x = 1 + 3t,\ y = 2 - 2t,\ z = -3 + 4t\}$.