Devoir Surveillé blanc n°2 — Chapitre 5

BTS MEC2 • Synthèse calcul vectoriel • Durée : 1 h30

Calculatrice autorisée • /40

Exercice 1 — Charpente — problème ouvert — 12 pts [Correction]

Une charpente triangulée en bois est modélisée par la figure suivante (coordonnées en mètres) :

$$A(0;0;0),\ B(6;0;0),\ C(6;4;0),\ D(0;4;0)$$

(base rectangulaire au sol), et

$$F(3;2;3) \text{ (faîtage central).}$$

La toiture est composée de 4 pans triangulaires : ABF, BCF, CDF, DAF.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DF}$.

2. Calculer l'aire de chacun des 4 pans via des produits vectoriels.

3. Calculer l'aire totale de la toiture.

4. Les 4 pans sont-ils de même aire ? Justifier.

5. Déterminer l'angle d'inclinaison de chaque pan par rapport à l'horizontale.

Exercice 2 — Plan et intersection — 10 pts [Correction]

On considère les trois points $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;6)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Vérifier que l'origine O n'appartient pas à ce plan.

3. Calculer la distance de O au plan (ABC).

4. Donner une représentation paramétrique de la droite d passant par O et perpendiculaire au plan (ABC).

5. Déterminer le point d'intersection H de d avec le plan (ABC).

6. Calculer OH. Comparer avec la distance $d(O,(ABC))$.

Exercice 3 — Vrai/Faux — 10 pts [Correction]

Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Justifier.

a) Si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, alors $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul.

b) Le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est toujours orthogonal à $\vec{u}$.

c) Si deux plans ont des vecteurs normaux colinéaires, ils sont parallèles.

d) Deux droites de l'espace non parallèles sont nécessairement sécantes.

e) La distance du point M au plan $\mathscr{P}$ peut être négative.

f) $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{v}\wedge\vec{u}$.

g) Si $\vec{n}$ est normal à $\mathscr{P}$, alors $-2\vec{n}$ aussi.

h) Un plan admet toujours une équation cartésienne unique à une constante multiplicative près.

i) L'angle entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{u}$ est de 180°.

j) $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Exercice 4 — Contexte coffrage — 8 pts [Correction]

Un coffrage de béton a la forme d'un prisme droit à base triangulaire. Les sommets de la base sont $A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(1;2;0)$. La hauteur est de 2,5 m dans la direction $\vec{k}$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire l'aire de la base.
3. Calculer le volume du coffrage ($V = \text{base} \times \text{hauteur}$).
4. Le béton coûte 120 euros/m^3. Coût de remplissage du coffrage ?
5. Les coffrages latéraux sont en bois facturés à 35 euros/m^2. Calculer l'aire des trois faces latérales puis le coût du bois.

Corrections

Correction 1 — Charpente — problème ouvert [Énoncé]

1. $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}$.

2. Pan ABF : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AF}=\begin{pmatrix}0\\-18\\12\end{pmatrix}$. Norme $=\sqrt{324+144}=\sqrt{468}=6\sqrt{13}$. Aire $=3\sqrt{13}\approx 10{,}82$.

Pan BCF : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix}$. $\wedge=\begin{pmatrix}12\\0\\12\end{pmatrix}$. Norme $=\sqrt{144+144}=12\sqrt{2}$. Aire $=6\sqrt{2}\approx 8{,}49$.

Pan CDF : par symétrie avec ABF, aire $=3\sqrt{13}\approx 10{,}82$.
Pan DAF : par symétrie avec BCF, aire $=6\sqrt{2}\approx 8{,}49$.
3. Total $=2\cdot 3\sqrt{13}+2\cdot 6\sqrt{2}=6\sqrt{13}+12\sqrt{2}\approx 21{,}63+16{,}97\approx 38{,}6$ m^2.
4. Non : 2 pans de $\approx 10{,}82$ m^2 (longs) et 2 pans de $\approx 8{,}49$ m^2 (courts). Cela vient de la base rectangulaire non carrée (6×4) : le faîtage central crée des pans asymétriques en profondeur.
5. Inclinaison : pour ABF, hauteur de $F=3$ m, demi-base $=2$ m (côté AB). Angle $=\arctan(3/2)\approx 56{,}3°$. Pour BCF, hauteur de $F=3$ m, demi-base $=3$ m (côté BC). Angle $=\arctan(3/3)=45°$.

Correction 2 — Plan et intersection [Énoncé]

1. Formule : $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6}=1 \iff 3x+2y+z-6=0$.
2. En O : $0-6=-6\neq 0$. $O\notin(ABC)$.
3. $d(O,(ABC))=\dfrac{|-6|}{\sqrt{9+4+1}}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}\approx 1{,}604$.
4. Normale $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. d : $\{x=3t,\ y=2t,\ z=t\}$.
5. Dans (ABC) : $3(3t)+2(2t)+t-6=14t-6=0 \iff t=\dfrac{3}{7}$. $H=\left(\dfrac{9}{7};\dfrac{6}{7};\dfrac{3}{7}\right)$.
6. $OH=\sqrt{(9/7)^2+(6/7)^2+(3/7)^2}=\dfrac{1}{7}\sqrt{81+36+9}=\dfrac{\sqrt{126}}{7}=\dfrac{3\sqrt{14}}{7}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$ (égale à $d(O,(ABC))$).

Correction 3 — Vrai/Faux [Énoncé]

a) FAUX. Deux vecteurs non nuls *orthogonaux* ont aussi un PS nul.
b) VRAI. C'est une propriété fondamentale du produit vectoriel.
c) VRAI. Normales colinéaires $\longrightarrow$ plans parallèles (strictement ou confondus).
d) FAUX. En 3D, deux droites non parallèles peuvent être *non coplanaires* (gauches).
e) FAUX. La distance est une longueur, toujours positive (ou nulle).
f) FAUX. $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$ (antisymétrique).
g) VRAI. Tout multiple non nul d'un vecteur normal est aussi normal.
h) VRAI. L'équation $ax+by+cz+d=0$ peut être multipliée par $k\neq 0$ pour obtenir une équation équivalente.
i) VRAI. $\cos\widehat{(\vec{u},-\vec{u})}=-1$ donc angle $=180°$.
j) VRAI. $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,|\sin\theta|$. Donc égal à $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$ ssi $|\sin\theta|=1$ ssi $\theta=90°$ ssi orthogonaux.

Correction 4 — Contexte coffrage [Énoncé]

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, norme = 6. Aire triangle = 3 m^2.

3. $V = 3 \times 2{,}5 = 7{,}5$ m^3.

4. Coût béton : $7{,}5 \times 120 = 900$ euros.

5. Trois faces latérales (rectangles) : dimensions basées sur les côtés AB, BC, CA × hauteur 2,5. $AB = 3$, $BC = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$, $CA = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \approx 2{,}24$. Aires : $3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$; $2\sqrt{2} \cdot 2{,}5 \approx 7{,}07$; $\sqrt{5} \cdot 2{,}5 \approx 5{,}59$. Total $\approx 20{,}16$ m^2. Coût bois : $20{,}16 \times 35 \approx 706{,}6$ euros.