Devoir Surveillé blanc n°1 — Chapitre 5

BTS MEC2 • Calcul vectoriel (plan & espace) • Durée : 1 h30

Calculatrice autorisée • /40

Format épreuve complète. Gérer le temps, soigner la rédaction.

Exercice 1 — Produit scalaire — 8 pts [Correction]

Soient $A(2;1;0)$, $B(4;0;-1)$ et $C(1;3;2)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer les normes AB, AC, BC.
4. En déduire le cosinus de $\widehat{BAC}$, puis l'angle en degrés.
5. Calculer l'aire du triangle ABC par la formule $\mathscr{A}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\,\|\overrightarrow{AC}\|\sin\widehat{BAC}$.
6. Retrouver cette aire avec la formule $\mathscr{A}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

Exercice 2 — Plan et droite — 8 pts [Correction]

On considère le plan $\mathscr{P}\ :\ x+2y-z+3=0$ et la droite d passant par $M(1;0;-2)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ à $\mathscr{P}$.
2. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{n}$. Que peut-on en déduire sur les positions relatives de d et $\mathscr{P}$?
3. Donner une représentation paramétrique de d.
4. Déterminer le point d'intersection I de d et $\mathscr{P}$.
5. Calculer la distance de M au plan $\mathscr{P}$.

Exercice 3 — Produit vectoriel et volume — 8 pts [Correction]

Soient $A(0;0;0)$, $B(4;0;0)$, $C(4;3;0)$, $D(0;3;0)$ (base rectangulaire) et $S(2;1{,}5;5)$ (sommet).

1. Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$. Que représente ce vecteur ?
3. En déduire l'aire de la base $ABCD$.
4. Calculer le produit mixte $(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AS}$.
5. En déduire le volume de la pyramide $ABCDS$ (formule : $V=\frac{1}{3}|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AS}|$).

Exercice 4 — Application BTP — câbles de grue — 8 pts [Correction]

Une grue dispose de trois câbles d'ancrage dont les vecteurs directeurs (normalisés, de la grue vers les ancres) sont :

$$\vec{u}_1\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{u}_2\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix},\quad \vec{u}_3\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

1. Les trois câbles font-ils le même angle avec la verticale ? (calculer $\cos\theta_i$ pour chacun).
2. Les câbles 1 et 2 forment-ils un angle droit ?

3. Soient T_1, T_2, T_3 les tensions à exercer pour équilibrer le poids $\vec{P}\begin{pmatrix}0\\0\\-450\end{pmatrix}$ (daN). Écrire le système d'équilibre.

4. Résoudre ce système.

Exercice 5 — Questions flash — 8 pts [Correction]

1. Donner la norme de $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}$.

2. Deux vecteurs orthogonaux : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-1\\k\end{pmatrix}$. Trouver k.

3. Donner le vecteur normal du plan $\mathscr{P} : -2x+5y+z-3=0$.

4. La droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est-elle parallèle au plan $\mathscr{P} : 3x+y-z+5=0$?

5. Aire du triangle OAB avec $O(0;0;0)$, $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$.

6. Deux points $A(1;2;3)$ et $B(4;5;6)$. Coordonnées du milieu I de $[AB]$.

7. Distance AB pour les mêmes points.

8. Donner l'équation du plan passant par $A(2;0;0)$, $B(0;3;0)$, $C(0;0;4)$.

Corrections

Correction 1 — Produit scalaire [Énoncé]

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2-2-2 = -6$.

3. $AB = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$. $AC = \sqrt{1+4+4} = 3$. $BC = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3}$.

4. $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{-6}{\sqrt{6}\cdot 3} = \dfrac{-2}{\sqrt{6}} \approx -0{,}816$. $\widehat{BAC} \approx 144{,}7°$.

5. $\sin 144{,}7° \approx 0{,}577$. $\mathscr{A} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 3\cdot 0{,}577 \approx 2{,}12$.

6. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}(-1)\cdot 2-(-1)\cdot 2\\(-1)\cdot(-1)-2\cdot 2\\2\cdot 2-(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\3\end{pmatrix}$. Norme $= \sqrt{0+9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Aire $= \dfrac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}12$.

Correction 2 — Plan et droite [Énoncé]

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

2. $\vec{u}\cdot\vec{n} = 2-2-3 = -3 \neq 0$: droite et plan **sécants** en un point.

3. $d\ :\ \{x = 1+2t,\ y = -t,\ z = -2+3t\}$.

4. $(1+2t)+2(-t)-(-2+3t)+3 = 1+2t-2t+2-3t+3 = -3t+6 = 0 \iff t = 2$. $I = (5;-2;4)$.

5. $d(M,\mathscr{P}) = \dfrac{|1+0-(-2)+3|}{\sqrt{1+4+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$.

Correction 3 — Produit vectoriel et volume [Énoncé]

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}2\\1{,}5\\5\end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix}$. Ce vecteur est **normal** à la base $ABCD$ (colinéaire à $\vec{k}$).

3. Aire base $= \left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\| = 12\ \text{m}^2$ (on retrouve 4×3).

4. $\begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1{,}5\\5\end{pmatrix} = 0+0+60 = 60$.

5. Volume pyramide : $V = \dfrac{1}{3}\cdot 60 = 20\ \text{m}^3$.

Correction 4 — Application BTP — câbles de grue [Énoncé]

1. Verticale : $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. $\cos\theta_i = \dfrac{\vec{u_i}\cdot\vec{k}}{\|\vec{u_i}\|\cdot 1} = \dfrac{z_i}{\|\vec{u_i}\|}$. $\|\vec{u_1}\| = \sqrt{13}$, $\cos\theta_1 = -\dfrac{3}{\sqrt{13}} \approx -0{,}832$. $\|\vec{u_2}\| = \sqrt{14}$, $\cos\theta_2 = -\dfrac{3}{\sqrt{14}} \approx -0{,}802$. $\|\vec{u_3}\| = \sqrt{14}$, $\cos\theta_3 = -\dfrac{3}{\sqrt{14}} \approx -0{,}802$. **Non identiques** : $\theta_1 \approx 146{,}3°$, $\theta_2 = \theta_3 \approx 143{,}3°$.

2. $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2} = -2+0+9 = 7 \neq 0$: **non** orthogonaux.

3. $T_1\vec{u_1}+T_2\vec{u_2}+T_3\vec{u_3} = -\vec{P} = \begin{pmatrix}0\\0\\450\end{pmatrix}$, soit : $\begin{cases}2T_1-T_2-T_3 = 0\\2T_2-2T_3 = 0\\-3T_1-3T_2-3T_3 = 450\end{cases}$

4. De (2) : $T_2 = T_3$. (3) : $-3(T_1+2T_2) = 450 \Rightarrow T_1+2T_2 = -150$. Attention : les vecteurs $\vec{u_i}$ sont dirigés de la grue vers les ancres (vers le bas), donc les tensions T_i doivent être positives si les câbles tirent vers le bas. Ici le poids $-\vec{P}$ pointe vers le haut, donc les T_i sont négatifs, cohérent. (1) : $2T_1 - T_2 - T_3 = 0 \iff 2T_1 = 2T_2 \iff T_1 = T_2$. D'où $T_1 + 2T_1 = -150$, $T_1 = -50$, et $T_2 = T_3 = -50$. Chaque câble exerce 50 daN (en module).

Correction 5 — Questions flash [Énoncé]

1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{4+9+36} = 7$.
2. $3 - 2 - k = 0 \iff k = 1$.
3. $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\cdot\vec{n} = 3 - 1 - 2 = 0$: **OUI** parallèle (ou incluse).
5. $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix}$, norme $= 12$. Aire $= 6$.
6. $I\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$.
7. $AB = \sqrt{9+9+9} = 3\sqrt{3} \approx 5{,}20$.
8. Équation type $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$, soit $6x + 4y + 3z - 12 = 0$ (multiplication par 12).