Chapitre 5 — Calcul vectoriel

BTS MEC2 • Géométrie analytique et espace

Table des matières

PROGRAMME BO — BTS Éco. Construction

Contenus : Vecteurs du plan et de l'espace : somme, produit par un scalaire, coordonnées, colinéarité. **Produit scalaire** dans le plan et dans l'espace : définition, propriétés, orthogonalité, projection. **Plans de l'espace** : vecteur normal, équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. **Représentation paramétrique** d'une droite de l'espace. **Produit vectoriel** : définition, propriétés, applications (aire, volume, normale à un plan).

Démonstrations : Démonstrations : les expressions équivalentes du produit scalaire. Orthogonalité $\Leftrightarrow$ produit scalaire nul.

Capacités : Capacités : calculer un produit scalaire par différentes méthodes ; caractériser l'orthogonalité ; déterminer un vecteur normal à un plan ; établir et exploiter une équation de plan ; établir et exploiter une représentation paramétrique de droite ; calculer un produit vectoriel ; appliquer au calcul d'aires et de volumes en contexte bâtiment.

Tout le cours

Positionnement dans la formation BTS

Ce chapitre prolonge en **espace 3D** les outils vectoriels étudiés en première année. Vous savez déjà (en MEC1 / depuis le lycée) :
— Définir un vecteur $\overrightarrow{AB}$, calculer sa somme, son opposé, son produit par un scalaire.
— Reconnaître la colinéarité de deux vecteurs (proportionnalité des coordonnées).
— Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans un repère : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
— Déterminer l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ d'une droite du plan.
— Calculer le milieu et la distance entre deux points.
— Utiliser le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$ pour tester la colinéarité.
Ce qui est nouveau en MEC2 : le **produit scalaire** (outil-clé pour l'orthogonalité et les projections); l'**espace 3D** (ajout d'une coordonnée z); les **plans** et leurs équations $ax + by + cz + d = 0$; le **produit vectoriel** (outil spécifique au BTS pour calcul d'aires, normales, volumes).

Rappel-flash — les acquis MEC1

Vecteurs du plan — ce qui doit être maîtrisé

Notion	**Formule / Définition**
Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
Somme	$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
Produit par scalaire k	$k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
Colinéarité	$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = 0$
Milieu de $[AB]$	$I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$
Distance AB	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Équation cart. droite	$ax + by + c = 0$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ directeur
Équation réduite	$y = mx + p$ ($m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, p ord. origine)

Sur un chantier, on place dans un repère orthonormé trois points : $A(2;1)$, $B(5;3)$, $C(11;7)$ (en mètres).
— Les trois points sont-ils alignés ?
— Calculer la distance AB.
— Donner l'équation cartésienne de (AB).

Correction professeur

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$. $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 3\times 6 - 2\times 9 = 18 - 18 = 0$: A, B, C sont alignés.

$AB = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$ m.

Vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, donc $a = 2$, $b = -3$. Équation : $2x - 3y + c = 0$. En $A(2;1)$: $4 - 3 + c = 0 \Rightarrow c = -1$.

Équation : $2x - 3y - 1 = 0$.

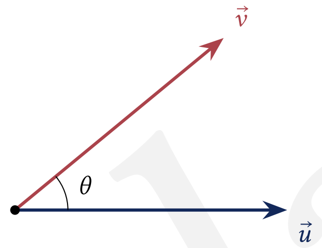
1 Produit scalaire dans le plan

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On note $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ l'angle non orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} \;=\; \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta}$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Le produit scalaire est un *nombre réel* (pas un vecteur). Il est **indépendant des représentants** des vecteurs : on peut choisir l'origine qu'on veut.



4 expressions équivalentes du produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Alors :

1. **Géométrique** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$
2. **Projeté orthogonal** : si H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \pm AB \times AH$
3. **Coordonnées** : si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
4. **Normes** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dfrac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

Partant de la forme géométrique avec la loi des cosinus appliquée au triangle formé par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v} - \vec{u}$, on obtient $\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$. En développant avec les coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, il vient $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. ■

Propriétés algébriques

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Bilinéarité** : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\vec{u} \cdot \vec{v}$
- **Carré scalaire** : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$ (nul ssi $\vec{u} = \vec{0}$)

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si leur angle est droit, c'est-à-dire :

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + (-2) \times 6 = 12 - 12 = 0$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Soient $A(1;2)$, $B(4;3)$, $C(3;6)$. Le triangle ABC est-il rectangle ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 + 4 = 10$ (non nul)
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -3 + 3 = 0 \Rightarrow$ angle $\hat{B}$ droit

Donc ABC est rectangle en B.

Méthode — choisir la bonne expression

- Données *coordonnées* : utiliser $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
- Données *longueurs + angle* : utiliser $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos\theta$.
- Données *longueurs + projeté* (géométrie pure) : utiliser $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$.
- Pour *montrer une orthogonalité* : calculer le produit scalaire et vérifier qu'il est nul.

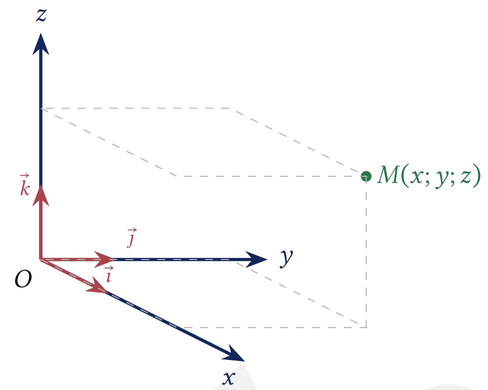
Correction professeur

Exercice. On donne $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 60°$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 3 \times \cos 60° = 15 \times \dfrac{1}{2} = 7{,}5$.

2 Vecteurs de l'espace

L'*espace* est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ où :
- $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme 1.
- Tout point M est repéré par un triplet $(x;y;z)$ appelé *coordonnées* de M.



Coordonnées dans l'espace

Si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ sont deux points de l'espace, alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$$

Les opérations sur les vecteurs se généralisent :
- $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$
- $k\vec{u}=\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$
- Distance : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Milieu de $[AB]$: $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

Sur un chantier, on relève avec un théodolite les coordonnées de deux points fixes $A(12;5;3)$ et $B(20;11;8)$ (en mètres, origine à la base de la grue).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\6\\5\end{pmatrix}$, d'où $AB=\sqrt{64+36+25}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}\approx 11{,}18$ m.

Correction professeur

Exercice. Soient $A(1;2;3)$ et $B(4;-1;0)$. Calculer les coordonnées du milieu I et la distance AB.

$I\left(\dfrac{1+4}{2};\dfrac{2-1}{2};\dfrac{3+0}{2}\right)=\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-3\\-3\end{pmatrix}$, $AB=\sqrt{9+9+9}=3\sqrt{3}\approx 5{,}20$.

3 Produit scalaire dans l'espace

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace dans une base orthonormée $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Leur *produit scalaire* est le réel :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Les formules géométriques $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$ et par projeté restent valables dans l'espace.

Propriétés (identiques au plan)

- Symétrie : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$.
- Bilinéarité : $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$, $(k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\vec{u}\cdot\vec{v}$.
- Carré scalaire : $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
- **Orthogonalité** : $\vec{u}\perp\vec{v} \iff xx' + yy' + zz' = 0$.

Norme d'un vecteur de l'espace

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Sur un pont, deux câbles porteurs ont respectivement pour vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$ (mètres).

Sont-ils perpendiculaires ?

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 1 + (-1)\times 5 + 3\times 1 = 2 - 5 + 3 = 0$. **Oui**, les câbles sont perpendiculaires.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$. Déterminer l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 - 2 + 4 = 4$. $\|\vec{u}\| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$.

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444, \qquad \theta \approx 63{,}6^\circ$$

Correction professeur

Exercice. Soient $A(1;0;2)$, $B(3;2;0)$, $C(2;4;3)$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ et en déduire si l'angle $\widehat{A}$ est aigu, droit ou obtus.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2 + 8 - 2 = 8 > 0$ donc $\cos\widehat{A} > 0$: angle **aigu**.

4 Plans de l'espace

Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Un *vecteur normal* à $\mathscr{P}$ est un vecteur *non nul* $\vec{n}$ orthogonal à tout vecteur du plan $\mathscr{P}$.
Équivalemment : $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathscr{P}$.

Équation cartésienne d'un plan

Un plan $\mathscr{P}$ passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet pour équation cartésienne :

$$\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$$

ou, en développant :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0} \qquad \text{avec } d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

Un point $M(x; y; z)$ appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.
Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Donc :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

■

Lecture directe : dans $ax + by + cz + d = 0$, les coefficients $(a; b; c)$ donnent directement les coordonnées d'un vecteur normal au plan.

Méthode — Trouver une équation de plan

Cas 1 — Plan défini par un point et un vecteur normal :
1. Écrire $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c)$ = coordonnées de $\vec{n}$.
2. Calculer d en remplaçant par les coordonnées de A.

Cas 2 — Plan défini par trois points A, B, C non alignés :
1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ *et* à $\overrightarrow{AC}$ (par produit vectoriel ou par résolution d'un système $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$).
3. Appliquer le cas 1.

Une toiture est identifiée par son plan $\mathscr{P}$ passant par le point $A(0;0;5)$ (faîtage) et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$ (vers l'extérieur et vers le haut).

Équation : $0 \cdot x + 2(y-0) + 3(z-5) = 0 \iff 2y + 3z - 15 = 0$.

Distance d'un point à un plan

La distance du point $M(x_0; y_0; z_0)$ au plan $\mathscr{P}\ :\ ax + by + cz + d = 0$ est :

$$\boxed{d(M,\mathscr{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Calculer la distance du point $M(3;4;5)$ au plan $\mathscr{P}\ :\ 2x - y + 2z - 6 = 0$.

$$d = \frac{|2\times 3 - 4 + 2\times 5 - 6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|6 - 4 + 10 - 6|}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

La distance est 2 unités.

Correction professeur

Exercice. Donner l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ passant par $A(2;-1;3)$ et orthogonal à (BC) avec $B(1;0;2)$ et $C(4;2;-1)$.

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{P}$. Équation : $3(x-2) + 2(y+1) - 3(z-3) = 0 \iff 3x + 2y - 3z + 5 = 0$.

5 Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit d une droite de l'espace passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$. Un point $M(x; y; z)$ appartient à d si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui s'écrit :

$$\boxed{d\ :\ \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}}$$

Le réel t s'appelle le *paramètre*.

Contrairement au plan, une droite de l'espace *n'a pas* d'équation cartésienne unique : elle est décrite par un **système** de deux équations (intersection de deux plans) ou par une **représentation paramétrique**.

Méthode — Déterminer une représentation paramétrique

1. **Deux points** A **et** B : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est directeur.
2. **Un point** A **et un vecteur** $\vec{u}$: formule directe.
3. **Intersection de deux plans** : résoudre le système, exprimer deux inconnues en fonction de la 3^{e} prise comme paramètre.

Représentation paramétrique de la droite passant par $A(1; 2; -3)$ et $B(4; 0; 1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 4\end{pmatrix}$. D'où :

$$d\ :\ \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 + 4t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour $t = 0$, on retrouve A. Pour $t = 1$, on retrouve B.

Intersection droite–plan

Pour trouver l'intersection de d (paramétrique) avec $\mathscr{P}\ :\ ax + by + cz + d_0 = 0$:

1. Substituer les expressions de x, y, z en fonction de t dans l'équation du plan.
2. Résoudre l'équation en t.
3. Reporter dans la paramétrique pour obtenir le point d'intersection.

Soit $d\ :\ \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}$ et $\mathscr{P}\ :\ 2x + y + z - 5 = 0$.

$2(1+t) + (2-t) + t - 5 = 0 \iff 2 + 2t + 2 - t + t - 5 = 0 \iff 2t - 1 = 0 \iff t = \dfrac{1}{2}$.
Point d'intersection : $\left(1 + \frac{1}{2}; 2 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Correction professeur

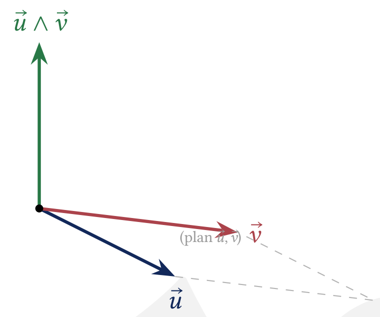
Exercice. Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $A(2;1;0)$ et orthogonale au plan $\mathscr{P}\ :\ x - 2y + 3z - 7 = 0$.

Le vecteur directeur de la droite est le vecteur normal du plan : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. D'où :

$$d\ :\ \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

6 Produit vectoriel

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Le *produit vectoriel* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur défini par :
- **Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- **Sinon** : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que :
  - direction : *orthogonal au plan* $(\vec{u}, \vec{v})$;
  - sens : donné par la *règle de la main droite* (ou des trois doigts) ;
  - norme : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin\theta|$ avec $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.



Calcul par coordonnées (développement de Sarrus)

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$:

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}}$$

Astuce mnémotechnique (déterminants 2×2) : on barre tour à tour chaque ligne :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \det \begin{smallmatrix} y & y' \\ z & z' \end{smallmatrix} \\ -\det \begin{smallmatrix} x & x' \\ z & z' \end{smallmatrix} \\ \det \begin{smallmatrix} x & x' \\ y & y' \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

Propriétés

- **Antisymétrie** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
- **Bilinéarité** : $(\vec{u} + \vec{w}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{v}$, $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$.
- Base directe : $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$, $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$, $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 - (-1) \times 0 \\ (-1) \times 3 - 2 \times 2 \\ 2 \times 0 - 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Applications géométriques clés

1. **Aire du parallélogramme** construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\mathscr{A}_{\text{parall.}} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

2. **Aire du triangle** ABC :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$$

3. **Vecteur normal à un plan** défini par trois points A, B, C :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

4. **Volume du parallélépipède** (produit mixte) : $V = |(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}|$.

Trois points d'une toiture : $A(0;0;3)$, $B(4;0;3)$, $C(2;3;4)$. Calculer l'aire du triangle ABC.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\cdot 1 - 0\cdot 3\\ 0\cdot 2 - 4\cdot 1\\ 4\cdot 3 - 0\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-4\\12\end{pmatrix}$$

$\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{0+16+144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$. Aire $= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32\ \text{m}^2$.

Correction professeur

Exercice. Donner un vecteur normal au plan passant par $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. Puis donner une équation de ce plan.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\cdot 1 - 0\cdot 0\\ 0\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\\ (-1)\cdot 0 - 1\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Équation : $x + y + z + d = 0$ avec $A(1;0;0)$: $1 + 0 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -1$. Équation : $x + y + z - 1 = 0$.

7 Applications BTP / chantier

Trois câbles tirent sur un point O d'une structure avec des forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. La structure est en *équilibre* ssi :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

Dans un repère orthonormé, ça se traduit par un système de 3 équations (une par composante).

Un poteau est soutenu par deux haubans, tendus selon les vecteurs $\vec{T}_1\begin{pmatrix}-3\\0\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{T}_2\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$ (en décanewtons).

Le poids $\vec{P}\begin{pmatrix}0\\0\\-12\end{pmatrix}$ s'applique vers le bas. Si une troisième force $\vec{F}$ doit équilibrer le système :

$$\vec{F} = -\vec{T}_1 - \vec{T}_2 - \vec{P} = -\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\\2\end{pmatrix}$$

Intensité : $\left\|\vec{F}\right\| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21} \approx 4{,}58$ daN.

Pour calculer l'aire d'une face inclinée (toiture, façade, etc.) non rectangulaire, on utilise le produit vectoriel : l'aire est la *norme* du produit vectoriel de deux côtés adjacents.

Panneau fixé sur un toit, sommets $A(0;0;0)$, $B(3;0;1)$, $C(3;2;1)$, $D(0;2;0)$. Aire du rectangle $ABCD$?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\cdot 0 - 1\cdot 2\\1\cdot 0 - 3\cdot 0\\3\cdot 2 - 0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}$. Aire $= \|(-2,0,6)\| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6{,}32\ \text{m}^2$.

Dans une charpente triangulée, on veut vérifier que deux entraits (ou poutres) forment un angle droit. On calcule le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs : angle droit $\iff$ produit scalaire nul.

Deux pannes ont pour vecteurs $\vec{p}_1\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{p}_2\begin{pmatrix}-6\\4\\0\end{pmatrix}$ (mètres).

$\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2 = -12+12+0 = 0$. Les deux pannes sont **orthogonales** : la charpente est correctement assemblée.

Pour un parallélépipède construit sur trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ issus d'un même sommet :

$$V = \left|\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \cdot \vec{w}\right|$$

Cette quantité s'appelle le *produit mixte* ou *déterminant* 3×3.

Une pièce a pour arêtes $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ (mètres).

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\0\\20\end{pmatrix}, \qquad V = |(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}| = |0 + 0 + 60| = 60 \text{ m}^3$$

Correction professeur

Exercice. Un toit incliné a pour 4 sommets $A(0;0;4)$, $B(6;0;6)$, $C(6;4;6)$, $D(0;4;4)$. Calculer la surface à tuiler.

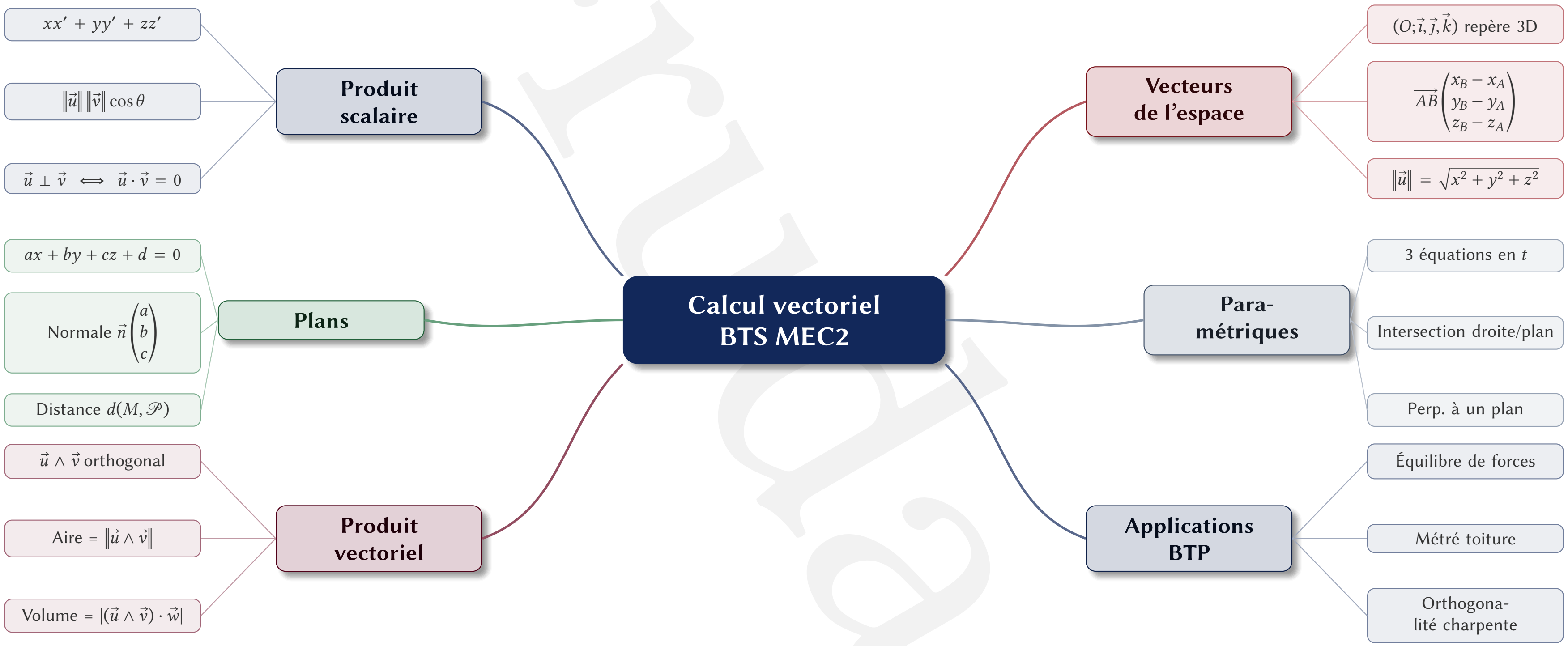
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-8\\0\\24\end{pmatrix}$. Aire $= \sqrt{64 + 576} = \sqrt{640} = 8\sqrt{10} \approx 25{,}3$ m^2.

8 Bilan du chapitre

Tableau de synthèse

Notion	Formule / Définition	Application BTP
$\vec{u} \cdot \vec{v}$ plan	$xx' + yy'$ ou $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$	orthogonalité, angle
$\vec{u} \cdot \vec{v}$ espace	$xx' + yy' + zz'$	idem en 3D
Orthogonalité	$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	charpente, pannes
Plan cart.	$ax + by + cz + d = 0, \vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$	toitures, façades
Paramétrique droite	$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$	conduites, câbles
$\vec{u} \wedge \vec{v}$	$\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$	vecteur normal, aire
Aire triangle ABC	$\frac{1}{2} \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$	métré de toiture
Volume parallélépipède	$\lvert(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}\rvert$	capacité de stockage
Distance M à $\mathscr{P}$	$\dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	dégagement, recul

Carte mentale — Ch. 5 Calcul vectoriel



Méthodes clés du chapitre

Produit scalaire coord.	$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$ (espace) ou $xx' + yy'$ (plan).
Orthogonalité	Vérifier $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
Angle entre deux vecteurs	$\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lVert\vec{u}\rVert\,\lVert\vec{v}\rVert}$, puis arccos.
Équation de plan	Point A + vecteur normal $\vec{n} \to a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$.
Représentation paramétrique	Point A + vecteur directeur $\vec{u} \to 3$ équations en t.
Produit vectoriel	Coordonnées par déterminants 2×2 ; $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$.
Aire d'un triangle 3D	$\dfrac{1}{2}\left\lVert\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\rVert$.
Distance point-plan	$d = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.