

Chapitre 5 – Calcul vectoriel

BTS MEC2 • Géométrie analytique et espace

Table des matières

Positionnement dans la formation	2
Rappel-flash MEC1	2
Produit scalaire dans le plan	3
Vecteurs de l'espace	5
Produit scalaire dans l'espace	6
Plans de l'espace	7
Représentation paramétrique d'une droite de l'espace	9
Produit vectoriel	11
Applications BTP / chantier	13
Bilan du chapitre	15

PROGRAMME BO – BTS Éco. Construction

Contenus : Vecteurs du plan et de l'espace : somme, produit par un scalaire, coordonnées, colinéarité. **Produit scalaire** dans le plan et dans l'espace : définition, propriétés, orthogonalité, projection. **Plans de l'espace :** vecteur normal, équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$. **Représentation paramétrique** d'une droite de l'espace. **Produit vectoriel :** définition, propriétés, applications (aire, volume, normale à un plan).

Démonstrations : Démonstrations : les expressions équivalentes du produit scalaire. Orthogonalité \Leftrightarrow produit scalaire nul.

Capacités : Capacités : calculer un produit scalaire par différentes méthodes; caractériser l'orthogonalité; déterminer un vecteur normal à un plan; établir et exploiter une équation de plan; établir et exploiter une représentation paramétrique de droite; calculer un produit vectoriel; appliquer au calcul d'aires et de volumes en contexte bâtiment.

Tout le cours



Positionnement dans la formation BTS

Ce chapitre prolonge en **espace 3D** les outils vectoriels étudiés en première année. Vous savez déjà (en MEC1 / depuis le lycée) :

- Définir un vecteur \overrightarrow{AB} , calculer sa somme, son opposé, son produit par un scalaire.
- Reconnaître la colinéarité de deux vecteurs (proportionnalité des coordonnées).
- Calculer les coordonnées de \overrightarrow{AB} dans un repère : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.
- Déterminer l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ d'une droite du plan.
- Calculer le milieu et la distance entre deux points.
- Utiliser le déterminant $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx'$ pour tester la colinéarité.

Ce qui est nouveau en MEC2 : le **produit scalaire** (outil-clé pour l'orthogonalité et les projections); l'**espace 3D** (ajout d'une coordonnée z); les **plans** et leurs équations $ax + by + cz + d = 0$; le **produit vectoriel** (outil spécifique au BTS pour calcul d'aires, normales, volumes).

Rappel-flash – les acquis MEC1

Vecteurs du plan – ce qui doit être maîtrisé

Notion	Formule / Définition
Coordonnées de \overrightarrow{AB}	$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$
Somme	$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
Produit par scalaire k	$k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$
Colinéarité	$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - yx' = 0$
Milieu de $[AB]$	$I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$
Distance AB	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Équation cart. droite	$ax + by + c = 0$ avec $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ directeur
Équation réduite	$y = mx + p$ ($m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, p ord. origine)

Sur un chantier, on place dans un repère orthonormé trois points : $A(2; 1)$, $B(5; 3)$, $C(11; 7)$ (en mètres).

- Les trois points sont-ils alignés ?
- Calculer la distance AB .
- Donner l'équation cartésienne de (AB) .

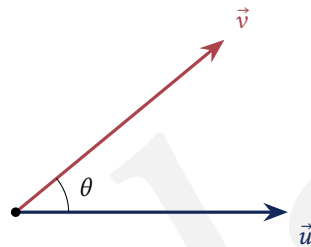
1 Produit scalaire dans le plan

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan. On note $\theta = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ l'angle non orienté entre \vec{u} et \vec{v} . Le *produit scalaire* de \vec{u} et \vec{v} est le réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Le produit scalaire est un *nombre réel* (pas un vecteur). Il est **indépendant des représentants** des vecteurs : on peut choisir l'origine qu'on veut.



4 expressions équivalentes du produit scalaire

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. Alors :

1. **Géométrique** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$
2. **Projeté orthogonal** : si H est le projeté orthogonal de C sur (AB) , alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \pm AB \times AH$
3. **Coordonnées** : si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
4. **Normes** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Partant de la forme géométrique avec la loi des cosinus appliquée au triangle formé par \vec{u} , \vec{v} et $\vec{v} - \vec{u}$, on obtient $\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$. En développant avec les coordonnées $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, il vient $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$. ■

Propriétés algébriques

Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et tout réel k :

- **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- **Bilinéarité** : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\vec{u} \cdot \vec{v}$
- **Carré scalaire** : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geq 0$ (nul ssi $\vec{u} = \vec{0}$)

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont *orthogonaux* si leur angle est droit, c'est-à-dire :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + (-2) \times 6 = 12 - 12 = 0$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

Soient $A(1; 2)$, $B(4; 3)$, $C(3; 6)$. Le triangle ABC est-il rectangle ?

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 + 4 = 10$ (non nul)
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -3 + 3 = 0 \Rightarrow$ angle \hat{B} droit

Donc ABC est rectangle en B .

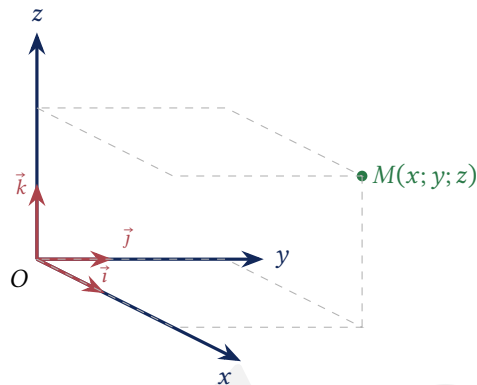
Méthode – choisir la bonne expression

- Données *coordonnées* : utiliser $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
- Données *longueurs + angle* : utiliser $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$.
- Données *longueurs + projeté* (géométrie pure) : utiliser $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \pm AB \times AH$.
- Pour *montrer une orthogonalité* : calculer le produit scalaire et vérifier qu'il est nul.

2 Vecteurs de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où :

- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont trois vecteurs deux à deux orthogonaux et de même norme 1.
- Tout point M est repéré par un triplet $(x; y; z)$ appelé *coordonnées* de M .



Coordonnées dans l'espace

Si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points de l'espace, alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

Les opérations sur les vecteurs se généralisent :

$$- \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

$$- k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$$

$$- \text{Distance : } AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$- \text{Milieu de } [AB] : I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

Sur un chantier, on relève avec un théodolite les coordonnées de deux points fixes $A(12; 5; 3)$ et $B(20; 11; 8)$ (en mètres, origine à la base de la grue).

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ d'où } AB = \sqrt{64 + 36 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11,18 \text{ m.}$$

3 Produit scalaire dans l'espace

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Leur *produit scalaire* est le réel :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Les formules géométriques $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ et par projeté restent valables dans l'espace.

Propriétés (identiques au plan)



- Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- Bilinearité : $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$, $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Carré scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
- **Orthogonalité** : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' + zz' = 0$.

Norme d'un vecteur de l'espace

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Sur un pont, deux câbles porteurs ont respectivement pour vecteurs directeurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mètres).

Sont-ils perpendiculaires ?

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-1) \times 5 + 3 \times 1 = 2 - 5 + 3 = 0$. **Oui**, les câbles sont perpendiculaires.

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminer l'angle θ entre \vec{u} et \vec{v} .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 - 2 + 4 = 4. \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{4}{9} \approx 0,444, \quad \theta \approx 63,6^\circ$$

4 Plans de l'espace

Soit \mathcal{P} un plan de l'espace. Un *vecteur normal* à \mathcal{P} est un vecteur *non nul* \vec{n} orthogonal à tout vecteur du plan \mathcal{P} .

Équivalamment : \vec{n} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de \mathcal{P} .

Équation cartésienne d'un plan

Un plan \mathcal{P} passant par le point $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet pour équation cartésienne :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$$

ou, en développant :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } d = -(ax_A + by_A + cz_A)$$

Un point $M(x; y; z)$ appartient à \mathcal{P} si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Or $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Donc :

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Lecture directe : dans $ax + by + cz + d = 0$, les coefficients $(a; b; c)$ donnent directement les coordonnées d'un vecteur normal au plan.

Méthode – Trouver une équation de plan



Cas 1 – Plan défini par un point et un vecteur normal :

1. Écrire $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a; b; c) =$ coordonnées de \vec{n} .
2. Calculer d en remplaçant par les coordonnées de A .

Cas 2 – Plan défini par trois points A, B, C non alignés :

1. Calculer \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} .
2. Déterminer un vecteur \vec{n} orthogonal à \overrightarrow{AB} et à \overrightarrow{AC} (par produit vectoriel ou par résolution d'un système $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$).
3. Appliquer le cas 1.

Une toiture est identifiée par son plan \mathcal{P} passant par le point $A(0; 0; 5)$ (faîtage) et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (vers l'extérieur et vers le haut).

$$\text{Équation : } 0 \cdot x + 2(y - 0) + 3(z - 5) = 0 \iff 2y + 3z - 15 = 0.$$

Distance d'un point à un plan



La distance du point $M(x_0; y_0; z_0)$ au plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ est :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Calculer la distance du point $M(3; 4; 5)$ au plan $\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 6 = 0$.

$$d = \frac{|2 \times 3 - 4 + 2 \times 5 - 6|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|6 - 4 + 10 - 6|}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

La distance est 2 unités.

5 Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit d une droite de l'espace passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Un point $M(x; y; z)$ appartient à d si et seulement s'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui s'écrit :

$$d : \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Le réel t s'appelle le *paramètre*.

Contrairement au plan, une droite de l'espace *n'a pas* d'équation cartésienne unique : elle est décrite par un **système** de deux équations (intersection de deux plans) ou par une **représentation paramétrique**.

Méthode – Déterminer une représentation paramétrique



1. **Deux points A et B** : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est directeur.
2. **Un point A et un vecteur \vec{u}** : formule directe.
3. **Intersection de deux plans** : résoudre le système, exprimer deux inconnues en fonction de la 3^e prise comme paramètre.

Représentation paramétrique de la droite passant par $A(1; 2; -3)$ et $B(4; 0; 1)$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}. \text{ D'où :}$$

$$d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour $t = 0$, on retrouve A . Pour $t = 1$, on retrouve B .

Intersection droite–plan



Pour trouver l'intersection de d (paramétrique) avec $\mathcal{P} : ax + by + cz + d_0 = 0$:

1. Substituer les expressions de x, y, z en fonction de t dans l'équation du plan.
2. Résoudre l'équation en t .
3. Reporter dans la paramétrique pour obtenir le point d'intersection.

$$\text{Soit } d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{P} : 2x + y + z - 5 = 0.$$

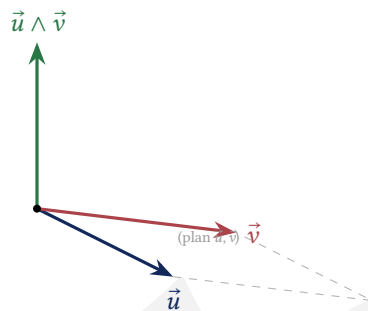
$$2(1+t) + (2-t) + t - 5 = 0 \iff 2 + 2t + 2 - t + t - 5 = 0 \iff 2t - 1 = 0 \iff t = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Point d'intersection : } \left(1 + \frac{1}{2}; 2 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

6 Produit vectoriel

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. Le *produit vectoriel* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est le vecteur défini par :

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- **Sinon** : $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur tel que :
 - direction : *orthogonal au plan* (\vec{u}, \vec{v}) ;
 - sens : donné par la *règle de la main droite* (ou des trois doigts);
 - norme : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin \theta|$ avec $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$.



Calcul par coordonnées (développement de Sarrus)

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Astuce mnémotechnique (déterminants 2×2) : on barre tour à tour chaque ligne :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} \det \begin{matrix} y & y' \\ z & z' \end{matrix} \\ -\det \begin{matrix} x & x' \\ z & z' \end{matrix} \\ \det \begin{matrix} x & x' \\ y & y' \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Propriétés

- **Antisymétrie** : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$.
- **Bilinéarité** : $(\vec{u} + \vec{w}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{w} \wedge \vec{v}$, $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k\vec{u} \wedge \vec{v}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$.
- Base directe : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$.

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 - (-1) \times 0 \\ (-1) \times 3 - 2 \times 2 \\ 2 \times 0 - 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Applications géométriques clés

1. Aire du parallélogramme construit sur \vec{AB} et \vec{AC} :

$$\mathcal{A}_{\text{parall.}} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

2. Aire du triangle ABC :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

3. Vecteur normal à un plan défini par trois points A, B, C :

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$$

4. Volume du parallélépipède (produit mixte) : $V = |(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}|$.

Trois points d'une toiture : $A(0; 0; 3)$, $B(4; 0; 3)$, $C(2; 3; 4)$. Calculer l'aire du triangle ABC .

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{0 + 16 + 144} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}. \text{ Aire} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} = 2\sqrt{10} \approx 6,32 \text{ m}^2.$$

7 Applications BTP / chantier

Trois câbles tirent sur un point O d'une structure avec des forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. La structure est en *équilibre* ssi :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

Dans un repère orthonormé, ça se traduit par un système de 3 équations (une par composante).

Un poteau est soutenu par deux haubans, tendus selon les vecteurs $\vec{T}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{T}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (en décanewtons).

Le poids $\vec{P} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$ s'applique vers le bas. Si une troisième force \vec{F} doit équilibrer le système :

$$\vec{F} = -\vec{T}_1 - \vec{T}_2 - \vec{P} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Intensité : $\|\vec{F}\| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21} \approx 4,58$ daN.

Pour calculer l'aire d'une face inclinée (toiture, façade, etc.) non rectangulaire, on utilise le produit vectoriel : l'aire est la *norme* du produit vectoriel de deux côtés adjacents.

Panneau fixé sur un toit, sommets $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 1)$, $C(3; 2; 1)$, $D(0; 2; 0)$. Aire du rectangle $ABCD$?

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}. \text{Aire} = \|(-2, 0, 6)\| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6,32 \text{ m}^2.$$

Dans une charpente triangulée, on veut vérifier que deux entrants (ou poutres) forment un angle droit. On calcule le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs : angle droit \iff produit scalaire nul.

Deux pannes ont pour vecteurs $\vec{p}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{p}_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mètres).

$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = -12 + 12 + 0 = 0$. Les deux pannes sont **orthogonales** : la charpente est correctement assemblée.

Pour un parallélépipède construit sur trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} issus d'un même sommet :

$$V = |(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

Cette quantité s'appelle le *produit mixte* ou *déterminant* 3×3 .

Une pièce a pour arêtes $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (mètres).

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad V = |(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}| = |0 + 0 + 60| = 60 \text{ m}^3$$

8 Bilan du chapitre

Tableau de synthèse

Notion	Formule / Définition	Application BTP
$\vec{u} \cdot \vec{v}$ plan	$xx' + yy'$ ou $\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ \cos \theta$	orthogonalité, angle
$\vec{u} \cdot \vec{v}$ espace	$xx' + yy' + zz'$	idem en 3D
Orthogonalité	$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$	charpente, pannes
Plan cart.	$ax + by + cz + d = 0, \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$	toitures, façades
Paramétrique droite	$\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}$	conduites, câbles
$\vec{u} \wedge \vec{v}$	$\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$	vecteur normal, aire
Aire triangle ABC	$\frac{1}{2} \ \vec{AB} \wedge \vec{AC}\ $	métré de toiture
Volume parallélépipède	$ (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} $	capacité de stockage
Distance M à \mathcal{P}	$\frac{ ax_0 + by_0 + cz_0 + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$	dégagement, recul

Carte mentale – Ch. 5 Calcul vectoriel

À toi de jouer! Recopie la carte mentale du cours dans la grille ci-dessous, avec tes propres mots et tes propres couleurs. Place « Calcul vectoriel BTS MEC2 » au centre, puis développe chaque notion en branches.

