

Planche 2 – Al-Kashi, sinus et cercle

BTS MEC2 • Ch.4 • Résolution de triangles, équation de cercle, angles inscrits, applications BTP

I Al-Kashi direct

Exercice 1 – Côté manquant 1 [Correction]

Triangle ABC : $AB = 5$, $AC = 8$, $\hat{A} = 35^\circ$. Calculer BC .

Exercice 2 – Côté manquant 2 [Correction]

$a = 12$, $c = 9$, $\hat{B} = 72^\circ$. Calculer b .

Exercice 3 – Côté manquant 3 [Correction]

$AB = 23$, $AC = 17$, $\hat{A} = 140^\circ$. Calculer BC .

II Al-Kashi inverse

Exercice 4 – 3 côtés \rightarrow angles [Correction]

$a = 7$, $b = 8$, $c = 9$. Calculer les 3 angles.

Exercice 5 – Idem [Correction]

$a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Calculer \hat{A} .

Exercice 6 – Triangle obtusangle [Correction]

$a = 15$, $b = 8$, $c = 10$. Le triangle est-il obtusangle ? Si oui, en quel sommet ?

III Loi des sinus

Exercice 7 – 2 angles + 1 côté [Correction]

$\hat{A} = 48^\circ$, $\hat{B} = 72^\circ$, $c = 10$. Calculer les 2 autres côtés.

Exercice 8 – Idem [Correction]

$\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{C} = 105^\circ$, $a = 5$. Calculer b et c .

Exercice 9 – Cas ambigu [Correction]

$a = 6$, $b = 10$, $\hat{A} = 40^\circ$. Combien de triangles possibles ?

IV Aires et cercle circonscrit

Exercice 10 – Aire formule trigo [Correction]

Triangle $AB = 8$, $AC = 10$, $\hat{A} = 50^\circ$. Calculer \mathcal{A} .

Exercice 11 – Héron [Correction]

Triangle $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$. Calculer \mathcal{A} .

Exercice 12 – Rayon circonscrit [Correction]

Triangle $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$. Calculer le rayon du cercle circonscrit.

Exercice 13 – Rayon inscrit [Correction]

Pour le même triangle que Exo 12, calculer le rayon du cercle inscrit ($r = \mathcal{A}/s$).

V Équations de cercle

Exercice 14 – Forme canonique [Correction]

Cercle de centre $\Omega(2; -3)$, rayon 4. Écrire l'équation.

Exercice 15 – Reconnaître [Correction]

Reconnaître : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

Exercice 16 – Reconnaître 2 [Correction]

$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

Exercice 17 – Pas un cercle [Correction]

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 10 = 0$ est-il un cercle ? Justifier.

Exercice 18 – Passant par 3 points [Correction]

Cercle passant par $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(0; 8)$.

Exercice 19 – Diamètre [Correction]

Cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(-1; 2)$, $B(5; 6)$.

VI Angles inscrits

Exercice 20 – Angle inscrit/au centre [Correction]

Dans un cercle, l'angle au centre vaut 80° . Calculer l'angle inscrit interceptant le même arc.

Exercice 21 – Triangle rectangle [Correction]

A, B, C sont sur un cercle de diamètre $[AB]$. Que peut-on dire de \widehat{ACB} ?

Exercice 22 – Polygone inscrit [Correction]

Quelle est la mesure d'un angle interne d'un heptagone régulier inscrit dans un cercle?

VII Applications BTP

Exercice 23 – Triangulation [Correction]

Pour mesurer AB au-dessus d'un fossé, on mesure depuis C : $CA = 40$ m, $CB = 55$ m, $\widehat{ACB} = 85^\circ$. Calculer AB .

Exercice 24 – Ferme de charpente [Correction]

Une ferme symétrique : entrain $AC = 6$ m, hauteur au sommet $B = 2,5$ m. Longueur d'un arbalétrier?

Exercice 25 – Terrain non rectangulaire [Correction]

Terrain en forme de triangle : 35 m, 42 m, 50 m. Aire (Héron)? Prix à 160 euros/m²?

Exercice 26 – Dimension d'une coupole [Correction]

Une coupole circulaire a un diamètre de 12 m au sol. Calculer sa circonférence. Volume de béton pour une dalle de 15 cm d'épaisseur?

Corrections

Correction 1 – Côté manquant 1 [Énoncé]

$$BC^2 = 25 + 64 - 80 \cos 35^\circ = 89 - 65,5 \approx 23,5. BC \approx 4,85.$$

Correction 2 – Côté manquant 2 [Énoncé]

$$b^2 = 144 + 81 - 216 \cos 72^\circ = 225 - 66,7 \approx 158,3. b \approx 12,58.$$

Correction 3 – Côté manquant 3 [Énoncé]

$$BC^2 = 529 + 289 - 782 \cos 140^\circ = 818 + 599 \approx 1417. BC \approx 37,64.$$

Correction 4 – 3 côtés → angles [Énoncé]

$$\cos A = \frac{64+81-49}{144} = \frac{96}{144} = \frac{2}{3}, A \approx 48,2^\circ. \cos B = \frac{49+81-64}{126} = \frac{66}{126} \approx 0,524, B \approx 58,4^\circ. C \approx 73,4^\circ.$$

Correction 5 – Al-Kashi inverse [Énoncé]

$$\cos A = \frac{196+225-169}{420} = \frac{252}{420} = 0,6, A \approx 53,1^\circ.$$

Correction 6 – Obtusangle? [Énoncé]

$$\cos A = \frac{64+100-225}{160} = \frac{-61}{160} < 0. \text{ Oui, obtusangle en } A, A \approx 112,4^\circ.$$

Correction 7 – Loi des sinus [Énoncé]

$$C = 60^\circ. a = \frac{10 \sin 48^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 8,58. b = \frac{10 \sin 72^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 10,98.$$

Correction 8 – Idem [Énoncé]

$$B = 45^\circ. b = \frac{5 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 5\sqrt{2} \approx 7,07. c = \frac{5 \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 9,66.$$

Correction 9 – Cas ambigu [Énoncé]

$$\sin B = \frac{10 \sin 40^\circ}{6} \approx 1,07 > 1. \text{ Aucun triangle possible.}$$

Correction 10 – Aire trigo [Énoncé]

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \sin 50^\circ \approx 40 \cdot 0,766 \approx 30,6.$$

Correction 11 – Héron [Énoncé]

$$s = 21. \mathcal{A} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7056} = 84.$$

Correction 12 – Rayon circonscrit [Énoncé]

$$\text{Cf. Ex.4 pour angles. } R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{7}{2 \sin 48,2^\circ} \approx 4,70. \text{ (Ou } \frac{abc}{4\mathcal{A}} \text{ avec Héron.)}$$

Correction 13 – Rayon inscrit [Énoncé]

$$\text{Héron pour Ex.4 : } s = 12, \mathcal{A} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720} \approx 26,83. r = \frac{26,83}{12} \approx 2,24.$$

Correction 14 – Forme canonique [Énoncé]

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16.$$

Correction 15 – Reconnaître 1 [Énoncé]

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25. \text{ Centre } (2; -3), \text{ rayon } 5.$$

Correction 16 – Reconnaître 2 [Énoncé]

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4. \text{ Centre } (-1; 2), \text{ rayon } 2.$$

Correction 17 – Pas un cercle [Énoncé]

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = -5. \text{ Impossible } (R^2 < 0). \text{ Ce n'est pas un cercle.}$$

Correction 18 – Par 3 points [Énoncé]

Triangle rectangle en A ($AB \perp AC$). Cercle circonscrit : diamètre BC. $BC = \sqrt{36 + 64} = 10$. Centre milieu (3; 4), $R = 5$. Équation : $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Correction 19 – Diamètre [Énoncé]

Centre milieu (2; 4). $AB = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. $R = \sqrt{13}$. Équation : $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 13$.

Correction 20 – Inscrit/centre [Énoncé]

Angle inscrit = $80^\circ/2 = 40^\circ$.

Correction 21 – Triangle rectangle [Énoncé]

[AB] diamètre, C sur le cercle $\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^\circ$ (angle inscrit qui intercepte un diamètre).

Correction 22 – Heptagone régulier [Énoncé]

Angle interne = $\frac{(7-2) \cdot 180^\circ}{7} = \frac{900^\circ}{7} \approx 128,6^\circ$.

Correction 23 – Triangulation [Énoncé]

$AB^2 = 1600 + 3025 - 4400 \cos 85^\circ \approx 4625 - 383,5 \approx 4241,5$. $AB \approx 65,1$ m.

Correction 24 – Ferme de charpente [Énoncé]

Demi-entrait 3 m, hauteur 2,5 m. Arbalétrier = $\sqrt{9 + 6,25} = \sqrt{15,25} \approx 3,91$ m.

Correction 25 – Terrain [Énoncé]

$s = 63,5$. $\mathcal{A} = \sqrt{63,5 \cdot 28,5 \cdot 21,5 \cdot 13,5} = \sqrt{525\,070} \approx 724,6$ m². Prix $\approx 115\,940$ euros.

Correction 26 – Coupole [Énoncé]

Rayon 6 m. Circonférence $2\pi \cdot 6 \approx 37,70$ m. Aire dalle $\pi \cdot 36 \approx 113,1$ m². Volume béton $\approx 113,1 \cdot 0,15 \approx 16,96$ m³.