

Devoir Surveillé blanc n°2 – Chapitre 4

BTS MEC2 • Synthèse finale • Durée : 1 h30

Calculatrice autorisée • /40

Exercice 1 – Topographie – problème complet – 12 pts [Correction]

Un terrain à bâtir a pour sommets A, B, C, D (quadrilatère) avec : $AB = 38$ m, $BC = 52$ m, $CD = 45$ m, $DA = 60$ m, $\widehat{ABC} = 98^\circ$.

1. Calculer AC (Al-Kashi dans ABC).
2. Calculer l'aire du triangle ABC .
3. Dans le triangle ACD , calculer l'angle \widehat{ACD} .
4. Calculer l'aire du triangle ACD .
5. En déduire l'aire totale du terrain.
6. Prix du terrain à 180 euros/m² ?

Exercice 2 – Cercle et constructions – 8 pts [Correction]

Un cercle \mathcal{C} a pour équation $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$.

1. Donner son centre et son rayon.
2. Tracer \mathcal{C} .
3. Déterminer les points d'intersection de \mathcal{C} avec l'axe des abscisses.
4. Déterminer les points d'intersection de \mathcal{C} avec la droite $y = x$.

Exercice 3 – Vrai/Faux – 10 pts [Correction]

- a) Dans un triangle rectangle, la longueur de la médiane issue de l'angle droit vaut la moitié de l'hypoténuse.
- b) $\cos \theta > 0$ pour tout $\theta \in]0; \pi[$.
- c) Dans un triangle équilatéral, toutes les bissectrices sont aussi des médianes.
- d) La formule d'Al-Kashi permet de calculer un angle connaissant les 3 côtés.
- e) Un cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2 = 0$ existe.
- f) L'aire d'un triangle de côtés 3, 4, 5 est 6.
- g) Un angle inscrit dans un demi-cercle est toujours droit.
- h) $\tan(\pi - \theta) = \tan \theta$ pour tout θ .
- i) Pour tous α, β : $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.
- j) Deux angles supplémentaires ont le même cosinus.

Exercice 4 – Application BTP – charpente triangulée – 10 pts [Correction]

Une ferme de charpente est constituée d'un entrain AC ($AC = 8$ m) et de deux arbalétriers AB et BC dont l'angle au sommet vaut $\widehat{ABC} = 105^\circ$. Les arbalétriers sont symétriques donc $AB = BC$.

1. Calculer AB (et donc BC) par la loi des sinus ou Al-Kashi.
2. La flèche h (hauteur du sommet B au-dessus de l'entrain) : calculer h .
3. Calculer l'angle que font les arbalétriers avec l'horizontale.
4. Si le prix du bois est 85 euros/m pour l'entrain et 120 euros/m pour les arbalétriers, calculer le coût total du bois.

Corrections

Correction 1 – Topographie – problème complet [Énoncé]

- $AC^2 = 38^2 + 52^2 - 2 \cdot 38 \cdot 52 \cos 98^\circ = 1444 + 2704 - 3952 \cdot (-0,1392) \approx 4698$. $AC \approx 68,5$ m.
- $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 38 \cdot 52 \sin 98^\circ \approx 988 \cdot 0,990 \approx 978$ m².
- Dans ACD : $\cos \widehat{ACD} = \frac{AC^2 + CD^2 - DA^2}{2 \cdot AC \cdot CD} = \frac{4698 + 2025 - 3600}{2 \cdot 68,5 \cdot 45} = \frac{3123}{6165} \approx 0,507$, $\widehat{ACD} \approx 59,5^\circ$.
- $\mathcal{A}_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 68,5 \cdot 45 \sin 59,5^\circ \approx 1541 \cdot 0,862 \approx 1328$ m².
- Aire totale $\approx 978 + 1328 = 2306$ m².
- Coût $\approx 2306 \times 180 = 415\,080$ euros.

Correction 2 – Cercle et constructions [Énoncé]

- $(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 9 = 0 \iff (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$. Centre (3;2), rayon 2.
 - Sur l'axe Ox ($y=0$) : $(x-3)^2 + 4 = 4 \iff (x-3)^2 = 0$, donc $x=3$. Intersection unique (3;0) (tangente).
 - Sur $y=x$: $(x-3)^2 + (x-2)^2 = 4 \iff 2x^2 - 10x + 9 = 0$. Discriminant = $100 - 72 = 28$. $x = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$.
- Deux points $\left(\frac{5+\sqrt{7}}{2}; \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right)$ et $\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}; \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$.

Correction 3 – Vrai/Faux [Énoncé]

- VRAI.** Médiane issue de l'angle droit = rayon du cercle circonscrit.
- FAUX.** $\cos \theta < 0$ pour $\theta \in]\pi/2; \pi[$.
- VRAI.** Dans un triangle équilatéral, toutes les médianes coïncident.
- VRAI.** Al-Kashi inverse : $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
- FAUX.** $x^2 + y^2 + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle.
- VRAI.** Triangle rectangle, $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.
- VRAI.** Angle inscrit interceptant un diamètre = 90° .
- FAUX.** $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$.
- VRAI.** Formule d'addition du cosinus.
- FAUX.** Angles supplémentaires : $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ (opposé).

Correction 4 – Charpente triangulée [Énoncé]

- Triangle isocèle en B avec $\hat{B} = 105^\circ$, donc $\hat{A} = \hat{C} = 37,5^\circ$. Loi des sinus : $\frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}}$. $AB = \frac{8 \sin 37,5^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{8 \cdot 0,6088}{0,9659} \approx 5,04$ m.
- Flèche : B est au-dessus du milieu de [AC]. Dans le demi-triangle (rectangle en milieu), $\tan 37,5^\circ = \frac{h}{4}$, $h = 4 \tan 37,5^\circ \approx 3,07$ m.
- L'angle avec l'horizontale est $\hat{A} = 37,5^\circ$.
- Longueur bois : entrant 8 m + 2 arbalétriers $2 \times 5,04 = 10,08$ m. Coût : $8 \times 85 + 10,08 \times 120 \approx 680 + 1210 = 1890$ euros.