Chapitre 4 — Configurations géométriques

BTS MEC2 • Trigonométrie, triangles et cercle

Table des matières

PROGRAMME BO — BTS Éco. Construction

Contenus : **Trigonométrie** : angles orientés, cercle trigonométrique, radians, valeurs remarquables, fonctions cos et sin. **Triangles** : Pythagore, Thalès, droites remarquables, loi des cosinus (*Al-Kashi*), loi des sinus. **Cercle** : angles inscrits et au centre, équation cartésienne. **Repérage** : distance, milieu, projeté orthogonal. Applications BTP : triangulation, topographie, métré.

Démonstrations : Démonstrations : formule d'Al-Kashi (via produit scalaire), identité fondamentale $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Capacités : Capacités : convertir degrés ↔ radians ; lire cos/sin sur le cercle trigo ; résoudre un triangle quelconque avec Al-Kashi ou les sinus ; établir et exploiter une équation de cercle ; appliquer à la topographie et au bâtiment.

Tout le cours

Rappel-flash — géométrie du collège et MEC1

Ce qui doit être maîtrisé

Théorème / Notion	Énoncé
Pythagore	Dans un triangle rectangle : $a^2 + b^2 = c^2$ (c = hypoténuse).
Réciproque de Pythagore	Si $a^2 + b^2 = c^2$, le triangle est rectangle.
Thalès	$\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$ pour $(MN) \parallel (BC)$.
Trigo triangle rect.	$\cos\theta = \dfrac{\text{adj}}{\text{hyp}}$, $\sin\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{hyp}}$, $\tan\theta = \dfrac{\text{opp}}{\text{adj}}$.
Droites remarquables	**Médianes** (concourantes en G, centre de gravité, tiers) ; **Médiatrices** (concourantes en O, centre cercle circonscrit) ; **Hauteurs** (concourantes en H, orthocentre) ; **Bissectrices** (concourantes en I, centre cercle inscrit).
Distance dans un repère	$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
Milieu de $[AB]$	$I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

angle	0°	30°	45°	60°	90°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Activités d'introduction

Objectif : comprendre pourquoi la mesure naturelle d'un angle est la longueur de l'arc (en radians).

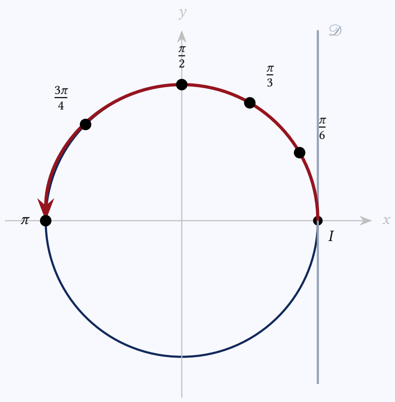
On considère un cercle de centre O et de rayon 1, et une droite $\mathscr{D}$ tangente au cercle au point $I(1;0)$. On enroule $\mathscr{D}$ autour du cercle dans le sens *direct* (sens trigo).

1. À quel point du cercle correspond l'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ sur $\mathscr{D}$? Et π ? Et 2π ?

2. Que représente alors un réel θ par rapport au cercle ?

3. En déduire combien vaut 1 radian en degrés (au dixième près).

4. Compléter : $30^\circ = ?$ rad, $45^\circ = ?$ rad, $60^\circ = ?$ rad, $90^\circ = ?$ rad, $180^\circ = ?$ rad.



Objectif : comprendre pourquoi Pythagore ne suffit pas pour un triangle non rectangle, et découvrir Al-Kashi.

Sur un chantier, un mur de soutènement a la forme suivante : $AB = 6$ m, $AC = 8$ m, et l'angle $\widehat{A}$ a été mesuré : $\widehat{A} = 70^\circ$.

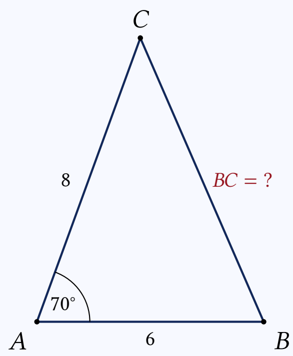
1. Le triangle est-il rectangle ? Justifier.

2. Peut-on appliquer Pythagore pour calculer BC ? Pourquoi ?

3. À l'aide du produit scalaire, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{A}$. Calculer BC au cm près.

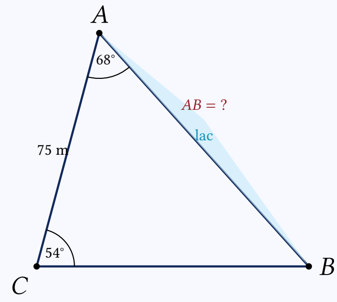
4. Que donne cette formule si $\widehat{A} = 90^\circ$? (Retrouver Pythagore.)

5. Dans quel cas obtient-on $BC = AB + AC$? Et $BC = |AB - AC|$?



Objectif : comprendre l'intérêt de la loi des sinus en topographie.

On veut mesurer la distance AB entre deux points séparés par un lac. On place un point C sur la rive accessible. Depuis C, on mesure $CA = 75$ m et deux angles au théodolite : $\widehat{BAC} = 68°$ et $\widehat{ACB} = 54°$.



1. Calculer $\widehat{ABC}$ (somme des angles d'un triangle = 180°).
2. La loi des sinus dit : $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$. En déduire AB au cm près.
3. Pourquoi aurait-on pu aussi utiliser Al-Kashi ?
4. Calculer aussi CB via la loi des sinus.

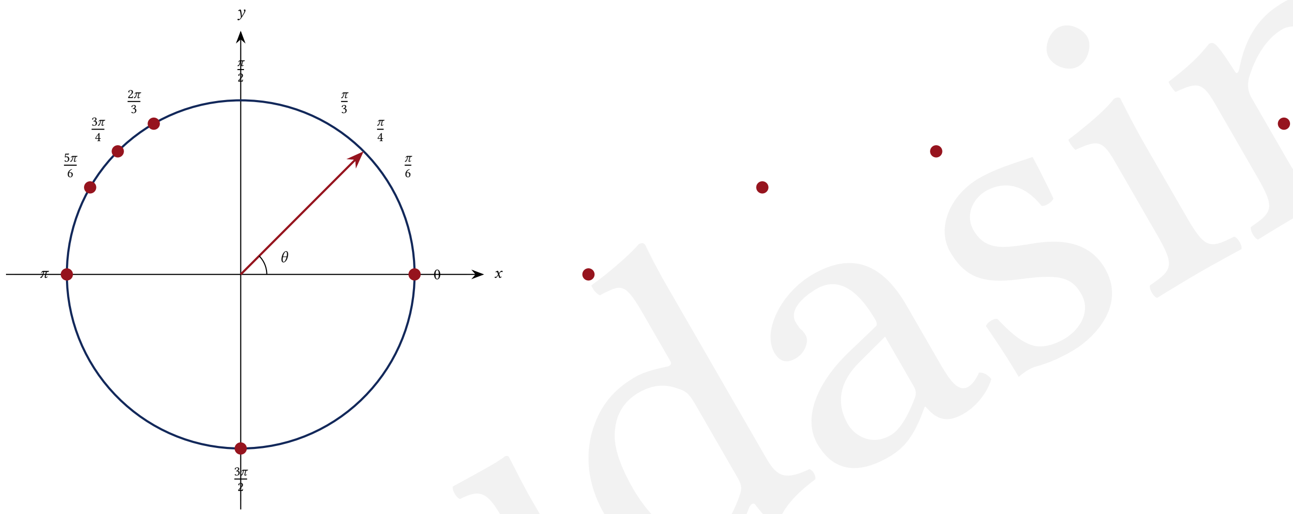
1 Le cercle trigonométrique et les radians

Le *cercle trigonométrique* est le cercle de centre O (origine d'un repère orthonormé) et de rayon 1, orienté dans le sens *trigonométrique direct* (sens inverse des aiguilles d'une montre).

Un *radian* est la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur égale au rayon.

Conversion : $180^\circ \iff \pi$ rad, soit :

$$\boxed{\alpha_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha_{\text{deg}}}$$



Conversions usuelles à mémoriser

deg	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	2π

— $75^\circ = 75 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$ rad.
— $\frac{7\pi}{4}$ rad $= \frac{7\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} = 315^\circ$.

2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit θ un réel. On associe au réel θ l'unique point M du cercle trigonométrique tel que θ soit une mesure (en radians) de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
— **Cosinus** de θ : $\cos\theta$ est l'*abscisse* de M.
— **Sinus** de θ : $\sin\theta$ est l'*ordonnée* de M.
Ainsi $M(\cos\theta\,;\ \sin\theta)$.

Propriétés fondamentales

Pour tout réel θ :
- $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ et $-1 \leq \sin\theta \leq 1$.
- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (*identité fondamentale*, venant de Pythagore).
- $\cos(-\theta) = \cos\theta$ (parité) et $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ (imparité).
- $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$ et $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ (périodicité 2π).

Valeurs remarquables (à mémoriser impérativement)

θ (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Moyen mnémotechnique : pour cos, on lit $\sqrt{n}/2$ avec $n = 4, 3, 2, 1, 0$ (de 0 à $\pi/2$). Pour sin, n va de 0 à 4.

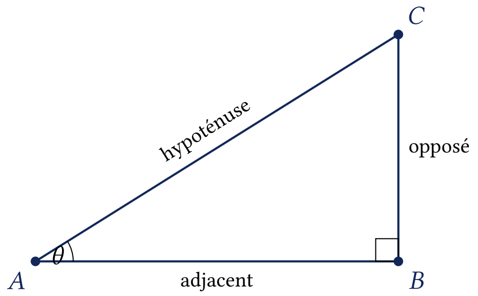
Angles associés — symétries

Pour tout réel θ :
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$; $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ (symétrie par rapport à Oy)
- $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$; $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$ (symétrie par rapport à O)
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ (angles complémentaires)

3 Trigonométrie du triangle rectangle

Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu θ :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \sin\theta = \frac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$



Depuis le sol, on vise le sommet d'une cheminée distante de 30 m. L'angle d'élévation mesuré est de 55°. Quelle est la hauteur h de la cheminée ?

On a un triangle rectangle avec l'angle aigu 55°, le côté adjacent = 30 m, et l'opposé = h. Donc :

$$\tan 55^\circ = \frac{h}{30} \iff h = 30\tan 55^\circ \approx 30 \times 1{,}428 \approx 42{,}8 \text{ m.}$$

4 Loi des cosinus — Al-Kashi

Dans un triangle quelconque ABC avec $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$$

Formules analogues (permutation circulaire) :

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

Dans le triangle ABC, par la relation de Chasles : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$. D'où :

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}$$

Or $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC} = a^2$, $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 = c^2$, $\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = b^2$, et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -bc\cos\widehat{A}$ (on change le sens de $\overrightarrow{BA}$).

Donc $a^2 = c^2 + b^2 - 2bc\cos\widehat{A}$. ■

Si $\widehat{A} = 90^\circ$, alors $\cos\widehat{A} = 0$ et Al-Kashi donne : $a^2 = b^2 + c^2$ — on retrouve le théorème de Pythagore.

Méthode — Utiliser Al-Kashi

Cas 1 : calculer un côté connaissant les 2 autres et l'angle compris.
Cas 2 : calculer un angle connaissant les 3 côtés, via :

$$\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Un triangle ABC a pour côtés $AB = 7$, $AC = 9$, et l'angle $\widehat{A} = 42°$. Calculer BC.

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{A} = 49 + 81 - 2 \cdot 7 \cdot 9 \cos 42° = 130 - 126 \cdot 0{,}743 \approx 36{,}4$.
$BC \approx \sqrt{36{,}4} \approx 6{,}03$.

5 Loi des sinus

Dans un triangle quelconque ABC avec $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$:

$$\boxed{\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R}$$

où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle.

$$\mathscr{A} = \tfrac{1}{2} bc \sin \widehat{A} = \tfrac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \tfrac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$

Méthode — Choisir Al-Kashi ou loi des sinus

- On connaît **2 côtés et l'angle compris** $\longrightarrow$ **Al-Kashi** pour trouver le 3^{e} côté.
- On connaît **les 3 côtés** $\longrightarrow$ **Al-Kashi inverse** ($\cos \widehat{A}$) pour trouver un angle.
- On connaît **2 angles et 1 côté** $\longrightarrow$ **Loi des sinus** pour trouver un autre côté (somme angles $= 180°$ pour le 3^{e}).
- On connaît **2 côtés et 1 angle non compris** $\longrightarrow$ **Loi des sinus** (attention à l'ambiguïté).

Pour mesurer la largeur AB d'une rivière, un géomètre se place en C et mesure : $AC = 50$ m, $\widehat{A} = 75°$, $\hat{C} = 60°$. Calculer AB.

Somme des angles : $\hat{B} = 180° - 75° - 60° = 45°$.
Loi des sinus : $\dfrac{AB}{\sin \hat{C}} = \dfrac{AC}{\sin \hat{B}}$, donc :

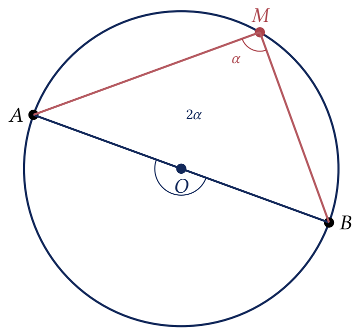
$$AB = \frac{AC \cdot \sin \hat{C}}{\sin \hat{B}} = \frac{50 \cdot \sin 60°}{\sin 45°} = \frac{50 \cdot 0{,}866}{0{,}707} \approx 61{,}2 \text{ m.}$$

6 Angles inscrits et angles au centre

Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux points A, B de $\mathscr{C}$.

— **Angle au centre** : c'est l'angle $\widehat{AOB}$ formé par les rayons $[OA]$ et $[OB]$.

— **Angle inscrit** : c'est l'angle $\widehat{AMB}$ où M est un point de $\mathscr{C}$ (distinct de A et B).



Si l'angle au centre $\widehat{AOB}$ et l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ interceptent le *même arc* $\overset{\frown}{AB}$, alors :

$$\boxed{\widehat{AOB} = 2\,\widehat{AMB}}$$

Conséquences

— **Angles inscrits interceptant le même arc sont égaux.**

— Un angle inscrit qui intercepte un *diamètre* est *droit* (90°).

— Par conséquent, tout triangle inscrit dans un cercle dont l'un des côtés est un diamètre est rectangle.

7 Équation cartésienne d'un cercle

Le *cercle* $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $R \geq 0$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\Omega M = R$.

Équation cartésienne :

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$

$$M(x;y) \in \mathscr{C} \iff \Omega M = R \iff \Omega M^2 = R^2 \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$ ■

Méthode — Reconnaître un cercle à partir d'une équation

Pour une équation de la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$:

1. Compléter les carrés : $(x + \frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\alpha^2}{4} + (y + \frac{\beta}{2})^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma = 0$.
2. Réécrire : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ avec $a = -\frac{\alpha}{2}$, $b = -\frac{\beta}{2}$, $R^2 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \gamma$.
3. Vérifier $R^2 > 0$ pour un cercle réel (sinon : point unique ou ensemble vide).

Soit $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

Compléter : $(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 - 3 = 0 \iff (x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$.
C'est le cercle de centre $\Omega(3;-2)$ et de rayon $R = 4$.

8 Applications BTP — triangulation et topographie

Pour mesurer une distance inaccessible (largeur d'une rivière, façade, fossé), on utilise un triangle virtuel où deux côtés accessibles et les angles correspondants sont mesurables. La loi des sinus permet de déduire la distance cherchée.

Pour mesurer la hauteur h d'une tour dont on ne connaît pas la base exacte, on mesure depuis un point A l'angle d'élévation $\alpha = 30°$. On avance de 20 m vers la tour (B) et on mesure l'angle $\beta = 45°$.

Soit x = distance horizontale de B au pied. Triangle : $h = x \tan 45° = x$ et $h = (x + 20) \tan 30°$.
D'où : $x = (x+20) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$, soit $x\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, donc $x = \frac{20\sqrt{3}/3}{1-\sqrt{3}/3} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \approx 27{,}32$. Hauteur $h \approx 27{,}3$ m.

Un terrain triangulaire ABC a pour côtés mesurés : $AB = 45$ m, $AC = 62$ m, $BC = 73$ m. Calculer son aire.

Héron : $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{45+62+73}{2} = 90$.

$$\mathscr{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{90 \cdot 17 \cdot 28 \cdot 45} = \sqrt{1\,927\,800} \approx 1388 \text{ m}^2.$$

Alternative via Al-Kashi puis aire : $\cos \widehat{A} = \frac{62^2+45^2-73^2}{2 \cdot 62 \cdot 45} = \frac{540}{5580} \approx 0{,}0968$, $\widehat{A} \approx 84{,}4°$. Aire $= \frac{1}{2} \cdot 62 \cdot 45 \cdot \sin 84{,}4° \approx 1388 \text{ m}^2$.

Dans un ensemble triangulé (charpente, ferme, poteau), le cercle circonscrit donne les points équidistants. Son rayon vaut $R = \dfrac{a}{2 \sin \widehat{A}}$.
Utilité : positionnement d'un point central dans une structure triangulaire.

9 Algorithmique — scripts Python

Automatiser les calculs trigonométriques récurrents (conversions, résolution de triangles, aires) avec Python. Ces scripts sont directement utilisables en salle informatique ou sur calculatrice (version NumWorks).

Script 1 — Conversion degrés ↔ radians

```python
import math

def deg_vers_rad(angle_deg):
    return angle_deg * math.pi / 180

def rad_vers_deg(angle_rad):
    return angle_rad * 180 / math.pi

# Tests
print(deg_vers_rad(60))            # Attendu : 1.047 (pi/3)
print(rad_vers_deg(math.pi / 4))   # Attendu : 45.0
```

Listing 1: **Python** — Conversions

Script 2 — Résolution de triangle par Al-Kashi

```python
import math

# Calcule le 3e cote connaissant 2 cotes et l'angle entre eux
def cote_manquant(b, c, angle_A_deg):
    A = math.radians(angle_A_deg)
    a_carre = b**2 + c**2 - 2*b*c*math.cos(A)
    return math.sqrt(a_carre)

# Calcule l'angle A oppose au cote a, connaissant les 3 cotes
def angle_par_3_cotes(a, b, c):
    cos_A = (b**2 + c**2 - a**2) / (2 * b * c)
    return math.degrees(math.acos(cos_A))

# Tests
print(f"a = {cote_manquant(12, 15, 48):.2f}")    # ~11.33
print(f"A = {angle_par_3_cotes(8, 5, 7):.1f}")  # ~81.8 degres
```

Listing 2: **Python** — Al-Kashi (côté ou angle)

Script 3 — Résolution par la loi des sinus

```python
import math

# Triangle avec 2 angles et 1 cote (cote_a oppose a angle_A)
def resolution_triangle_AAS(angle_A_deg, angle_B_deg, cote_a):
    A = math.radians(angle_A_deg)
    B = math.radians(angle_B_deg)
    C = math.pi - A - B  # somme des angles = pi
    b = cote_a * math.sin(B) / math.sin(A)
    c = cote_a * math.sin(C) / math.sin(A)
    return (math.degrees(C), b, c)

# Test : A=35, B=70, a=8
angle_C, b, c = resolution_triangle_AAS(35, 70, 8)
print(f"C = {angle_C:.1f} degres, b = {b:.2f}, c = {c:.2f}")
```

Listing 3: **Python** — Loi des sinus

Script 4 — Aire d'un triangle (Héron)

```
import math

# Aire d'un triangle connaissant les 3 cotes
def aire_heron(a, b, c):
    s = (a + b + c) / 2
    # Verifier l'inegalite triangulaire
    if a + b <= c or a + c <= b or b + c <= a:
        return None  # triangle impossible
    return math.sqrt(s * (s-a) * (s-b) * (s-c))

# Test : terrain 45 x 62 x 73 m
aire = aire_heron(45, 62, 73)
print(f"Aire terrain : {aire:.2f} m2")    # ~1388

# Cout a 85 euros/m2
prix = aire * 85
print(f"Prix du terrain : {prix:.0f} euros")
```

Listing 4: **Python** — Formule de Héron

Ces scripts servent à :
- Vérifier rapidement les résultats des DM/DS.
- Faire varier les paramètres (impact de l'angle sur l'aire, etc.).
- Sur chantier : un technicien peut résoudre un triangle au pied levé (mesures de terrain).
- Constituer des barèmes automatiques (devis selon dimensions).

10 Bilan du chapitre

Tableau de synthèse

Notion	**Formule / Définition**	**Usage typique**
Radian	$180^\circ \iff \pi\,\text{rad}\,;\, \alpha_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180}\alpha_{\text{deg}}$	Angles orientés
Cercle trigo	$M(\cos\theta; \sin\theta)$	Valeurs remarquables
Identité fondamentale	$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	Simplifications
Trigo triangle rect.	cos, sin, tan = rapports côtés	Hauteurs, inclinaisons
Al-Kashi	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$	Triangle non rectangle
Loi des sinus	$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$	Triangulation
Aire triangle (sin)	$\mathscr{A} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$	Métré terrain
Aire triangle (Héron)	$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	Métré 3 côtés connus
Angle inscrit/centre	$\widehat{\text{centre}} = 2\widehat{\text{inscrit}}$	Géométrie du cercle
Équation de cercle	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	Tracés, lieux géométriques

Carte mentale — Ch. 4 Configurations géométriques

À toi de jouer ! Recopie la carte mentale du cours dans la grille ci-dessous, avec tes propres mots et tes propres couleurs.