

Planche d'exercices n°2

Tests d'hypothèse et comparaison d'échantillons

BTS MEC2 – Chapitre 3

Planche dédiée aux tests d'hypothèse bilatéraux, unilatéraux, et à la comparaison de deux échantillons. **10 annales BTS authentiques** (groupements B, C, D – sessions 2003 à 2011) à l'identique du phrasé officiel, complétées par **8 exercices maison** sur comparaison, p -valeur, puissance et dimensionnement. Corrigés détaillés en fin de planche.

Exercice 1 – Bouteilles – machine d'embouteillage [Correction]

BTS • Gr.B • Métro. 2003

Une machine à embouteiller produit des bouteilles. Le volume Z suit $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$ avec $\sigma = 0,01$ L. On échantillonne $n = 100$ bouteilles. La machine est bien réglée si $\mu = 1,5$ L.

$H_0 : \mu = 1,5; H_1 : \mu \neq 1,5$; seuil $\alpha = 5\%$.

- Justifier que sous H_0 , $\bar{Z} \sim \mathcal{N}(1,5; 0,001)$.
- Déterminer $h > 0$ tel que $P(1,5 - h \leq \bar{Z} \leq 1,5 + h) = 0,95$.
- Énoncer la règle de décision.
- On observe $\bar{z} = 1,495$. Peut-on conclure que la machine est bien réglée au seuil 5%?

Exercice 2 – Rondelles d'acier [Correction]

BTS • Gr.B • Métro. 2005

Un usine produit des rondelles. On considère X_2 la moyenne des diamètres d'un échantillon de $n = 100$ rondelles. Sous $H_0 : \mu = 90$, on admet $P(89,967 \leq X_2 \leq 90,033) = 0,95$. Alternative $H_1 : \mu \neq 90$; seuil 5%.

- Énoncer la règle de décision.
- On observe $\bar{x} = 90,02$. Peut-on conclure que la livraison est conforme au seuil 5%?

Exercice 3 – Ventilateurs – hauteur du support [Correction]

BTS • Gr.B • Métro. 2007

On contrôle la hauteur μ de pièces de type 3 (ventilateurs). Z suit $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$ avec $\sigma = 5$ mm. Échantillon de $n = 100$ pièces; sous $H_0 : \mu = 400$, on admet $\bar{Z} \sim \mathcal{N}(400; 0,5)$. $H_1 : \mu \neq 400$; seuil 5%.

- Déterminer $h > 0$ tel que $P(400 - h \leq \bar{Z} \leq 400 + h) = 0,95$.
- Énoncer la règle de décision.
- On observe $\bar{z} = 399,12$. Peut-on conclure que la livraison est conforme au seuil 5%?

Exercice 4 – Véhicules électriques – autonomie [Correction]

BTS • Gr.B • NC 2008

Après modification des batteries, on veut contrôler l'autonomie moyenne μ . $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$, $\sigma = 6$ km. Échantillon $n = 36$, donc sous $H_0 : \mu = 104$, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(104; 1)$. $H_1 : \mu \neq 104$; seuil 5%.

- Déterminer $h > 0$ tel que $P(104 - h \leq \bar{X} \leq 104 + h) = 0,95$.
- Règle de décision.
- On mesure $\bar{x} = 102,5$ km. Conclusion au seuil 5%?

Exercice 5 – Poulie – emmanchement (auto) [Correction]

BTS • Gr.B • NC 2006

On contrôle la cote μ après emmanchement. Sous $H_0 : \mu = 40$, $\bar{Z} \sim \mathcal{N}(40; 0,011)$. $H_1 : \mu \neq 40$; seuil

5%. Échantillon $n = 30$.

- Déterminer h tel que $P(40 - h \leq \bar{Z} \leq 40 + h) = 0,95$.
- Règle de décision.
- On observe $\bar{x} = 39,98$. Peut-on conclure que le lot est conforme au seuil 5%?

Exercice 6 – Axes moteurs – machine G [Correction]

BTS • Gr.C • Métro. 2005

Pour vérifier le réglage de la machine G, on construit un test bilatéral au risque 5% : $H_0 : \mu = 350$; $H_1 : \mu \neq 350$. Sous H_0 , $\bar{X} \sim \mathcal{N}(350; 0,5)$ ($n = 100$).

- Déterminer h tel que $P(350 - h \leq \bar{X} \leq 350 + h) = 0,95$.
- Règle de décision.
- On observe $\bar{x} = 349$. Conclusion au risque 5%?

Exercice 7 – Barres de métal – longueur [Correction]

BTS • Gr.C • Métro. 2008

Une machine produit des barres de longueur $X \sim \mathcal{N}(m; \sigma)$ avec $\sigma = 0,17$ cm. Pour un échantillon de $n = 30$, la moyenne \bar{X} suit $\mathcal{N}(m; 0,03)$ cm. $H_0 : m = 92,50$; $H_1 : m \neq 92,50$; seuil 5%.

- Déterminer h tel que $P(92,5 - h < \bar{X} < 92,5 + h) = 0,95$.
- Règle de décision.

3. Un échantillon donne $\bar{x} = 92,45$. Peut-on admettre $m = 92,50$ au seuil 5 % ?

Exercice 8 – Disques – diamètre 238 mm [Correction]

BTS • Gr.C • Métro. 2011

Test bilat au risque 5 % pour vérifier si la moyenne μ des diamètres est 238 mm. Sous H_0 , $\bar{Z} \sim \mathcal{N}(238; 0,06)$ ($n = 45$).

1. Hypothèse alternative H_1 ?
2. Déterminer h tel que $P(238 - h \leq \bar{Z} \leq 238 + h) = 0,95$.
3. Règle de décision.
4. On observe $\bar{z} = 237,91$ mm. Conclusion au seuil 5 % ?

Exercice 9 – Tubes polyéthylène (chauffage géothermique)

BTS • Gr.D • Métro. 2011

Test bilatéral au seuil 5 % de la moyenne μ des longueurs. Sous $H_0 : \mu = 300$, $\bar{Z} \sim \mathcal{N}(300; 0,10)$ ($n = 100$). $H_1 : \mu \neq 300$.

1. Déterminer h arrondi à 10^{-2} tel que $P(300 - h \leq \bar{Z} \leq 300 + h) = 0,95$.
2. Règle de décision.
3. On observe $\bar{z} \approx 299,90$. Conclusion au seuil 5 % ?

Exercice 10 – Barres de combustible nucléaire [Correction]

BTS • Gr.B • Métro. 2011

Contrôle de qualité d'un lot de pastilles de combustible ; diamètre moyen μ . Sous $H_0 : \mu = 8,13$, on admet $\bar{D} \sim \mathcal{N}(8,13; 0,012)$ et $P(8,106 \leq \bar{D} \leq 8,154) = 0,95$. $H_1 : \mu \neq 8,13$; seuil 5 %, $n = 300$.

1. Énoncer la règle de décision.
2. On observe $\bar{d} = 8,16$. Peut-on conclure que la livraison est conforme au seuil 5 % ?

Exercice 11 – Test unilatéral – durée de vie [Correction] $n_B = 300$ par B : $k_B = 24$ non-conformes.

exo maison

Un fabricant annonce une durée de vie moyenne $\mu_0 = 1200$ h. Un lot est testé : $n = 50$ composants, $\bar{x} = 1150$ h, $\sigma = 200$ h. On craint $\mu < \mu_0$.

1. Formuler H_0 et H_1 (test unilatéral à gauche).
2. Au seuil $\alpha = 5$ %, déterminer la région critique pour \bar{X} .
3. Calculer $Z_{\text{obs}} = (\bar{x} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$.
4. Conclure et donner la p -valeur.

Exercice 12 – p -valeur – test bilatéral [Correction]

exo maison

Test bilat : $H_0 : \mu = 50$, $H_1 : \mu \neq 50$. $\sigma = 5$ connu, $h = 100$. On observe $\bar{x} = 51,2$.

1. Calculer Z_{obs} .
2. Donner la p -valeur exacte et commenter.
3. Conclusion au seuil $\alpha = 5$ % puis $\alpha = 1$ %.

Exercice 13 – Comparaison – 2 procédés A / B [Correction]

exo maison

Deux procédés produisent des pièces. $\sigma_A = 0,3$, $\sigma_B = 0,4$ connus. Sur deux échantillons indépendants : $n_A = 50$, $\bar{x}_A = 20,5$; $n_B = 60$, $\bar{x}_B = 20,8$.

1. Formuler $H_0 : \mu_A = \mu_B$ et $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$.
2. Sous H_0 , donner la loi de $\bar{X}_A - \bar{X}_B$ puis la statistique de test Z .
3. Calculer Z_{obs} et conclure au seuil 5 %.
4. Donner un IC à 95 % de la différence $\mu_A - \mu_B$.

Exercice 14 – Comparaison – 2 proportions [Correction]

exo maison

On teste deux méthodes de production. Sur $n_A = 200$ pièces produites par A : $k_A = 12$ non-conformes. Sur

1. Calculer f_A , f_B .
2. Sous $H_0 : p_A = p_B$, calculer la fréquence commune $\hat{p} = (k_A + k_B)/(n_A + n_B)$.
3. Calculer $Z_{\text{obs}} = (f_A - f_B)/\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})(1/n_A + 1/n_B)}$ et conclure au seuil 5 %.

Exercice 15 – Puissance d'un test [Correction]

exo maison

Test bilat $H_0 : \mu = \mu_0 = 100$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$, $\sigma = 5$, $n = 25$, $\alpha = 5$ %. On souhaite la probabilité de détecter $\mu_1 = 102$.

1. Donner la région d'acceptation de H_0 .
2. Sous $\mu = \mu_1$, quelle est la loi de \bar{X} ?
3. Calculer $\beta = P_{\mu_1}(\bar{X} \in \text{accept.})$ puis la puissance $\pi(\mu_1) = 1 - \beta$.

Exercice 16 – Dimensionnement d'un test [Correction]

exo maison

Test bilat $H_0 : \mu = \mu_0$, $\sigma = 2$, $\alpha = 5$ %. On veut puissance $\pi \geq 90$ % pour détecter un écart $|\mu - \mu_0| = 1$.

1. Exprimer la condition en fonction de n .
2. En utilisant $z_{\alpha/2} = 1,96$ et $z_{\beta} = 1,282$ (pour $\beta = 10$ %), déterminer n minimal.

Exercice 17 – Choix du test – unilat ou bilat ? [Correction]

exo maison

Un laboratoire soupçonne qu'un nouveau catalyseur augmente le rendement. Rendement historique $\mu_0 = 75$ %, $\sigma = 3$ %. Essai sur $n = 36$ lots : $\bar{x} = 76,2$ %.

1. Justifier le choix d'un test unilatéral à droite.
2. Poser H_0 , H_1 et déterminer la région critique à $\alpha = 5$ %.
3. Calculer Z_{obs} ; conclure. Donner la p -valeur.

4. Même analyse avec un test bilatéral. Quelle est la différence de décision ?

Exercice 18 – Synthèse – étude d'un contrôle [Correction]

exo maison

$\sigma = 0,5$, $n = 64$, $\bar{x} = 12,18$. Le cahier des charges impose $\mu = 12$ mm.

1. Test bilat $H_0 : \mu = 12$ au seuil 5 % : conclusion.
2. IC à 95 % de μ : cohérence avec le test.
3. p -valeur correspondante.
4. Refaire le test au seuil 1 % : conclusion et p -valeur.
5. En supposant $\sigma = 0,5$ constant, quelle taille d'échantillon faudrait-il pour que la région critique $|\bar{X} - 12| > 0,05$ corresponde au seuil $\alpha = 5$ % ?

Corrections

Correction 1 – Bouteilles [Énoncé]

1. $\sigma_{\bar{z}} = \sigma/\sqrt{n} = 0,01/\sqrt{100} = 0,001$; sous H_0 , $\bar{Z} \sim \mathcal{N}(1,5 ; 0,001)$.
2. $h = 1,96 \times 0,001 = 0,00196$.
3. Rejeter H_0 si $|\bar{z} - 1,5| > 0,00196$, sinon non-rejet.
4. $|1,495 - 1,5| = 0,005 > 0,00196$: **rejet** de H_0 . Au seuil 5 %, la machine n'est pas bien réglée.

Correction 2 – Rondelles [Énoncé]

1. Rejeter H_0 si $\bar{x} \notin [89,967 ; 90,033]$.
2. $90,02 \in [89,967 ; 90,033]$: **non-rejet** de H_0 au seuil 5 %. La livraison peut être considérée conforme.

Correction 3 – Ventilateurs [Énoncé]

1. $h = 1,96 \times 0,5 = 0,98$.
2. Rejeter H_0 si $|\bar{z} - 400| > 0,98$.
3. $|399,12 - 400| = 0,88 < 0,98$: **non-rejet**. Livraison

conforme au seuil 5 %.

Correction 4 – Véhicules électriques [Énoncé]

1. $h = 1,96 \times 1 = 1,96$.
2. Rejeter H_0 si $|\bar{x} - 104| > 1,96$.
3. $|102,5 - 104| = 1,5 < 1,96$: **non-rejet**. Pas d'évidence d'un changement d'autonomie moyenne.

Correction 5 – Poulie [Énoncé]

1. $h = 1,96 \times 0,011 \approx 0,022$.
2. Rejeter H_0 si $|\bar{z} - 40| > 0,022$.
3. $|39,98 - 40| = 0,02 < 0,022$: **non-rejet**. Le lot est conforme au seuil 5 %.

Correction 6 – Axes machine G [Énoncé]

1. $h = 1,96 \times 0,5 = 0,98$.
2. Rejeter H_0 si $|\bar{x} - 350| > 0,98$.
3. $|349 - 350| = 1 > 0,98$: **rejet**. La machine G n'est pas bien réglée au seuil 5 %.

Correction 7 – Barres métal [Énoncé]

1. $h = 1,96 \times 0,03 = 0,0588$.
2. Rejeter H_0 si $|\bar{x} - 92,50| > 0,0588$.
3. $|92,45 - 92,50| = 0,05 < 0,0588$: **non-rejet**. On peut admettre $m = 92,50$ au seuil 5 %.

Correction 8 – Disques 238 mm [Énoncé]

1. $H_1 : \mu \neq 238$.
2. $h = 1,96 \times 0,06 \approx 0,118$.
3. Rejeter H_0 si $|\bar{z} - 238| > 0,118$.
4. $|237,91 - 238| = 0,09 < 0,118$: **non-rejet**. Moyenne compatible avec 238 mm au seuil 5 %.

Correction 9 – Tubes polyéthylène [Énoncé]

1. $h = 1,96 \times 0,10 = 0,196 \approx 0,20$.
2. Rejeter H_0 si $|\bar{z} - 300| > 0,20$.

3. $|299,90 - 300| = 0,10 < 0,20$: **non-rejet**. Livraison conforme au seuil 5 %.

Correction 10 – Barres combustible [Énoncé]

1. Rejeter H_0 si $\bar{d} \notin [8,106 ; 8,154]$.
2. $\bar{d} = 8,16 > 8,154$: **rejet**. La livraison n'est pas conforme au seuil 5 %.

Correction 11 – Test unilat durée de vie [Énoncé]

1. $H_0 : \mu = 1200$; $H_1 : \mu < 1200$.
2. $\sigma/\sqrt{n} = 200/\sqrt{50} \approx 28,28$. Région critique : $\bar{X} < 1200 - 1,645 \times 28,28 = 1153,5$.
3. $Z_{\text{obs}} = (1150 - 1200)/28,28 \approx -1,768$.
4. $Z_{\text{obs}} < -z_{\alpha} = -1,645$: **rejet** de H_0 . p -valeur = $\Phi(-1,768) \approx 0,0385 < 5$ %. La durée de vie moyenne est significativement inférieure.

Correction 12 – p -valeur bilat [Énoncé]

1. $\sigma/\sqrt{n} = 0,5$. $Z_{\text{obs}} = (51,2 - 50)/0,5 = 2,4$.
2. $p = 2(1 - \Phi(2,4)) \approx 2 \times 0,0082 = 0,0164 (\approx 1,6 \%)$.
3. À $\alpha = 5$ % : $p < 5$ % \Rightarrow rejet. À $\alpha = 1$ % : $p > 1$ % \Rightarrow non-rejet. Le seuil conditionne la décision.

Correction 13 – Comparaison 2 moyennes [Énoncé]

1. $H_0 : \mu_A = \mu_B$ vs $H_1 : \mu_A \neq \mu_B$.
2. Sous H_0 , $\bar{X}_A - \bar{X}_B \sim \mathcal{N}(0 ; \sqrt{\sigma_A^2/n_A + \sigma_B^2/n_B})$. Ici $\sqrt{0,09/50 + 0,16/60} = \sqrt{0,0018 + 0,00267} \approx 0,0668$. $Z = (\bar{X}_A - \bar{X}_B)/0,0668$.
3. $Z_{\text{obs}} = (20,5 - 20,8)/0,0668 \approx -4,49$. $|Z_{\text{obs}}| > 1,96$: **rejet** de H_0 ; différence significative.
4. IC = $[(20,5 - 20,8) \pm 1,96 \times 0,0668] = [-0,431 ; -0,169]$, ne contient pas 0.

Correction 14 – Comparaison 2 proportions [Énoncé]

1. $f_A = 12/200 = 0,06$; $f_B = 24/300 = 0,08$.

2. $\hat{p} = (12 + 24)/(200 + 300) = 36/500 = 0,072$.
 3. $\sigma = \sqrt{0,072 \times 0,928 \times (1/200 + 1/300)} = \sqrt{0,0668 \times 0,00833} \approx 0,02362$.
 $Z_{\text{obs}} = (0,06 - 0,08)/0,02362 \approx -0,847$. $|Z_{\text{obs}}| < 1,96$:
non-rejet. Pas de différence significative à 5 %.

Correction 15 – Puissance [Énoncé]

1. $\sigma/\sqrt{n} = 5/5 = 1$. Région d'acceptation de H_0 :
 $\bar{X} \in [100 - 1,96; 100 + 1,96] = [98,04; 101,96]$.
 2. Sous $\mu = 102$: $\bar{X} \sim \mathcal{N}(102; 1)$.
 3. $\beta = P(98,04 \leq \bar{X} \leq 101,96 \mid \mu = 102) = \Phi(-0,04) - \Phi(-3,96) \approx 0,4840 - 0,0000 = 0,4840$.
 Puissance $\pi = 1 - \beta \approx 51,6$ %.

Correction 16 – Dimensionnement test [Énoncé]

1. Puissance 90 % pour $|\mu - \mu_0| = 1$ avec $\sigma = 2$:
 condition $\sqrt{n} \geq (z_{\alpha/2} + z_{\beta})\sigma/|\mu - \mu_0|$.
 2. $\sqrt{n} \geq (1,96 + 1,282) \times 2/1 = 6,484 \Rightarrow n \geq 42,04 \Rightarrow n \geq 43$.

Correction 17 – Unilat / bilat [Énoncé]

1. On a une *direction* a priori (augmentation) : test unilat à droite.
 2. $H_0 : \mu = 0,75$ vs $H_1 : \mu > 0,75$.
 $\sigma/\sqrt{n} = 0,03/6 = 0,005$. Région critique :
 $\bar{X} > 0,75 + 1,645 \times 0,005 = 0,7582$.
 3. $Z_{\text{obs}} = (0,762 - 0,75)/0,005 = 2,4$; $Z_{\text{obs}} > 1,645$:
rejet. $p = 1 - \Phi(2,4) \approx 0,0082 < 5$ %.
 4. Bilat : région critique
 $|\bar{X} - 0,75| > 1,96 \times 0,005 = 0,0098$, soit $\bar{X} > 0,7598$. On

reste juste au-dessus \Rightarrow **rejet** aussi, mais avec $p \approx 0,016$. Le bilat est *moins puissant* pour une direction connue.

Correction 18 – Synthèse contrôle [Énoncé]

1. $\sigma/\sqrt{n} = 0,5/8 = 0,0625$. $h = 1,96 \times 0,0625 = 0,1225$.
 $|12,18 - 12| = 0,18 > 0,1225$: **rejet** au seuil 5 %.
 2. IC 95% = $[12,18 \pm 0,1225] = [12,058; 12,303]$, ne contient pas 12 : cohérent avec le rejet.
 3. $Z_{\text{obs}} = (12,18 - 12)/0,0625 = 2,88$;
 $p = 2(1 - \Phi(2,88)) \approx 0,004$.
 4. À $\alpha = 1$ % : $z_{\alpha/2} = 2,576$, $h = 0,161$. $0,18 > 0,161$:
rejet aussi. $p \approx 0,004 < 1$ %.
 5. $h = 1,96 \times 0,5/\sqrt{n} \leq 0,05 \Rightarrow \sqrt{n} \geq 19,6 \Rightarrow n \geq 385$.