Planche d'exercices n°1

Échantillonnage et estimation

BTS MEC2 — Chapitre 3

*Cette planche compile **11 exercices issus d'annales BTS authentiques** (badge BTS • session) couvrant les sessions Métropole / Nouvelle-Calédonie 2002–2011 des groupements B et D, complétés par **9 exercices maison** (badge exo maison) pour couvrir dimensionnement et cas-limites. Corrigés détaillés en fin de planche.*

Exercice 1 — Tiges métalliques — diamètre [Correction]

BTS • Gr.B • Métro. 2004

Une entreprise fabrique des tiges métalliques cylindriques. On s'intéresse à leur diamètre, exprimé en mm. Un échantillon de $n = 50$ tiges est prélevé au hasard et avec remise.

On note D la v.a. qui, à tout échantillon de 50 tiges, associe la moyenne des diamètres. On admet que $D \sim \mathcal{N}\left(\mu\,;\,\frac{\sigma}{\sqrt{50}}\right)$ avec $\sigma = 0{,}19$.

Pour l'échantillon prélevé : $\bar{x} = 9{,}99$ mm.

1. Donner une estimation ponctuelle de μ.
2. Déterminer un IC centré sur $\bar{x}$ de μ au coefficient de confiance 95 %.
3. L'affirmation « μ est obligatoirement dans l'IC obtenu » est-elle vraie ?

Exercice 2 — Assurances — flotte de véhicules [Correction]

BTS • Gr.B • Métro. 2002

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 véhicules dans le parc d'une entreprise de maintenance. On constate que 91 véhicules n'ont pas eu de sinistre depuis 6 mois.

1. Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de véhicules sans sinistre.
2. Soit F la v.a. associant à tout échantillon de 100 véhicules le pourcentage de véhicules sans sinistre. On admet $F \sim \mathcal{N}\left(p\,;\,\sqrt{\frac{p(1-p)}{100}}\right)$. Déterminer un IC de p au coefficient de confiance 95 %.
3. L'affirmation « p est obligatoirement dans l'IC » est-elle vraie ?

Exercice 3 — Chaudières — type « à cheminée » [Correction]

BTS • Gr.B • Métro. 2006

Une entreprise fabrique deux types de chaudières : « à cheminée » et « à ventouse ». Sur un échantillon aléatoire de $n = 400$ chaudières prélevées dans la production (avec remise), 288 sont « à cheminée ».

1. Donner une estimation ponctuelle de la fréquence p des chaudières « à cheminée ».
2. On suppose $F \sim \mathcal{N}\left(p\,;\,\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$. Déterminer un IC de p à 95 %.
3. Vérifier les conditions de validité $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$.

Exercice 4 — Pièces de bois — encastrement [Correction]

BTS • Gr.B • Métro. 2008

Une entreprise fabrique des pièces de bois en grande série. Sur un échantillon de $n = 100$ pièces prélevées au hasard avec remise, 96 sont sans défaut.

1. Donner une estimation ponctuelle de la proportion p de pièces sans défaut.
2. On admet $F \sim \mathcal{N}(p\,;\,\sqrt{p(1-p)/n})$. Déterminer un IC de p à 95 %.
3. Sur un deuxième contrôle, on mesure $n' = 400$ pièces avec $f' = 0{,}96$. Comparer la précision des deux IC.

Exercice 5 — Machine de conditionnement [Correction]

BTS • Gr.B • Métro. 2010 B1

Une usine conditionne des sachets dont la masse est exprimée en grammes. On note X la v.a. donnant la masse d'un sachet. On admet X suit une loi normale d'écart type $\sigma = 4$.

On prélève un échantillon aléatoire de $n = 64$ sachets : moyenne $\bar{x} = 502{,}5$ g.

1. Donner la loi de $\overline{X}$.
2. Donner un IC de la moyenne μ à 95 % centré sur $\bar{x}$.
3. La norme interne impose $\mu = 500$ g. L'IC contient-il 500 ?

Exercice 6 — Accessoire automobile [Correction]

BTS • Gr.B • Métro. 2009

Une entreprise produit en grande série un accessoire automobile. La masse M d'un accessoire suit une loi normale d'écart type $\sigma = 0{,}4$ g. On prélève un échantillon de $n = 100$ accessoires : $\overline{m} = 32{,}15$ g.

1. Donner la loi de la v.a. $\overline{M}$.
2. Déterminer un IC de la masse moyenne μ à 95 %.
3. Déterminer un IC à 99 %. Comparer avec la question 2.

Exercice 7 — Plaques métalliques — industrie auto [Correction]

BTS • Gr.B • NC 2011

Une entreprise produit des plaques métalliques rectangulaires. Sur $n = 200$ plaques prélevées aléatoirement avec remise, 12 sont non conformes.

1. Donner une estimation ponctuelle de la proportion p de plaques non conformes.
2. Déterminer un IC de p à 95 %, en supposant $F \sim \mathcal{N}(p\,;\,\sqrt{p(1-p)/n})$.
3. Les conditions de validité sont-elles remplies ?

Exercice 8 — Comprimés — labo pharmaceutique [Correction]

BTS • Gr.D • Métro. 2005

Un laboratoire fabrique des comprimés. On note X la masse d'un comprimé (en mg), $X \sim \mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$ avec $\sigma = 2$ mg.

Un échantillon aléatoire de $n = 36$ comprimés donne $\overline{x} = 103{,}4$ mg.

1. Donner la loi de $\overline{X}$.
2. Déterminer un IC de μ à 95 %.
3. Déterminer un IC de μ à 90 %.

Exercice 9 — Eau minérale — taux de calcium [Correction]

BTS • Gr.D • Métro. 2006

Une usine produit de l'eau minérale. Le taux de calcium Z (en mg/L) suit $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma/\sqrt{n})$ avec $\sigma = 1{,}2$. L'eau est dite « calcaire » si $Z > 6{,}5$.

On prélève $n = 30$ bouteilles au hasard : $\overline{z} = 5{,}95$.

1. Donner une estimation ponctuelle de μ.
2. Déterminer un IC de μ à 95 %.
3. Peut-on en déduire que $\mu < 6{,}5$?

Exercice 10 — Ketchup — bouteilles en verre [Correction]

BTS • Gr.D • Métro. 2008

Un industriel conditionne du ketchup. La masse X d'une bouteille suit $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$, $\sigma = 3$ g. Un échantillon de $n = 40$ bouteilles donne $\overline{x} = 252{,}3$ g.

1. Donner la loi de $\overline{X}$.
2. Déterminer un IC de μ à 95 % centré sur $\overline{x}$.
3. La norme annoncée est 250 g. Cette valeur est-elle dans l'IC ?

Exercice 11 — Récipients cylindriques — laboratoire [Correction]

BTS • Gr.D • Métro. 2010

Une usine fabrique des récipients cylindriques. Le diamètre X du couvercle suit $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma)$, $\sigma = 0{,}2$ mm. Un échantillon de $n = 25$ récipients donne $\overline{x} = 60{,}05$ mm.

1. Donner la loi de $\overline{X}$.
2. Déterminer un IC de μ à 95 %.
3. Le diamètre théorique est 60 mm. L'IC le contient-il ?

Exercice 12 — Estimation sans biais [Correction]

exo maison

Un échantillon de $n = 25$ pièces donne $\overline{x} = 12{,}35$ cm et écart type empirique $s = 0{,}48$ cm.

1. Rappeler la formule de l'estimateur sans biais $\hat{\sigma}$ de σ.
2. Calculer $\hat{\sigma}$ numériquement.
3. Donner un IC de μ à 95 %, en approchant σ par $\hat{\sigma}$.

Exercice 13 — Conditions de validité — proportion [Correction]

exo maison

On veut estimer la proportion p de pièces défectueuses dans une livraison. On prélève au hasard un échantillon et on observe $f = 0{,}04$.

1. Pour $n = 50$: les conditions $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$ sont-elles remplies ?
2. Pour $n = 200$: mêmes questions. Si oui, donner un IC de p à 95 %.
3. Quelle valeur minimale de n garantit $nf \geq 5$ ici ?

Exercice 14 — Dimensionnement — IC moyenne [Correction]

exo maison

On veut estimer la moyenne μ d'une production avec une précision de $\pm 0{,}05$ à 95 %. On sait que $\sigma = 0{,}3$.

1. Montrer que la demi-largeur de l'IC à 95 % s'écrit $h = z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
2. En déduire la plus petite valeur de n telle que $h \leq 0{,}05$.
3. Même question pour une précision de $\pm 0{,}02$.

Exercice 15 — Dimensionnement — IC proportion [Correction

exo maison

On cherche à estimer la proportion p de votants pour une mesure, à ± 3 points près au niveau 95 %.

1. Montrer que $\sqrt{p(1-p)} \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout $p \in [0, 1]$.
2. En déduire la taille n minimale d'échantillon garantissant la précision voulue dans le pire cas.
3. Si on sait a priori $p \approx 0{,}45$, quelle taille suffit ?

Exercice 16 — Précision vs. taille d'échantillon [Correction]

exo maison

$\sigma = 0{,}25$ connu. Le technicien mesure $n_1 = 36$ pièces : $\overline{x}_1 = 10{,}02$.

1. Donner l'IC à 95 %.

2. Pour diviser la précision par 2, combien de mesures faut-il ?
3. Pour la diviser par 3 ?

Exercice 17 — Niveau de confiance variable [Correction]

exo maison

Un échantillon de $n = 100$ pièces donne $\overline{x} = 50{,}1$ cm, $\sigma = 0{,}8$.

1. Donner l'IC de μ à 90 %.
2. Idem à 95 %, puis à 99 %.
3. Classer les trois IC par largeur croissante. Commentaire ?

Exercice 18 — Sondage — contrôle qualité [Correction]

exo maison

Sur $n = 500$ composants contrôlés, $f = 0{,}08$ sont défectueux.

1. Donner un IC de la proportion p à 95 %.
2. Le fournisseur annonce $p = 0{,}05$. Est-ce cohérent ?
3. Combien de composants faut-il contrôler pour avoir ± 1 % à 95 % ? (prendre $f = 0{,}08$)

Exercice 19 — Institut de sondage [Correction]

exo maison

Un institut interroge $n = 1\,000$ personnes : 47 % sont favorables à une mesure M. Il annonce « 47 ± 3 points à 95 % ».

1. Vérifier la marge annoncée.
2. Calculer la marge exacte à partir de $f = 0{,}47$.
3. Donner l'IC à 95 %.
4. Quelle taille pour une marge ± 2 points ?
5. La mesure est-elle minoritaire avec certitude ?

Exercice 20 — Synthèse — pièces mécaniques [Correction]

exo maison

Une usine produit des pièces. Un échantillon de $n = 100$ pièces donne $\overline{x} = 14{,}97$ mm et $s = 0{,}20$ mm. Le cahier des charges exige $\mu = 15$ mm.

A. Estimation.

1. Donner une estimation ponctuelle de μ et l'estimation sans biais de σ.
2. Donner un IC de μ à 95 % (utiliser $\hat{\sigma}$).

B. Décision.

3. 15,00 est-il dans l'IC à 95 % ?
4. Reprendre à 99 %.
5. Conclusion sur le respect du cahier des charges.

C. Dimensionnement.

6. Taille minimale n' pour une précision $\pm 0{,}02$ à 95 %.
7. Idem à 99 %.

Corrections

Correction 1 — Tiges métalliques [Énoncé]

1. $\hat{\mu} = \overline{x} = 9{,}99$ mm.
2. $\sigma/\sqrt{50} \approx 0{,}0269$. IC $= [9{,}99 \pm 1{,}96 \times 0{,}0269] = [9{,}937\,;\, 10{,}043]$.
3. **Non** : l'IC est aléatoire ; μ n'y est *pas* forcément. Seulement 95 % des IC possibles contiennent μ.

Correction 2 — Assurances [Énoncé]

1. $\hat{p} = f = 91/100 = 0{,}91$.
2. $\sqrt{0{,}91 \times 0{,}09/100} \approx 0{,}0286$. IC $= [0{,}91 \pm 1{,}96 \times 0{,}0286] = [0{,}854\,;\, 0{,}966]$.
3. Non (même raison).

Correction 3 — Chaudières [Énoncé]

1. $\hat{p} = 288/400 = 0{,}72$.
2. $\sigma_F = \sqrt{0{,}72 \times 0{,}28/400} \approx 0{,}0225$. IC $= [0{,}72 \pm 0{,}0440] = [0{,}676\,;\, 0{,}764]$.
3. $nf = 288 \geq 5$, $n(1-f) = 112 \geq 5$. OK.

Correction 4 — Pièces de bois [Énoncé]

1. $\hat{p} = 0{,}96$.
2. $\sqrt{0{,}96 \times 0{,}04/100} = 0{,}0196$. IC $= [0{,}96 \pm 0{,}0384] = [0{,}922\,;\, 0{,}998]$.
3. Avec $n' = 400$: $\sqrt{0{,}96 \times 0{,}04/400} = 0{,}0098$, IC $= [0{,}941\,;\, 0{,}979]$: précision $\approx$ doublée (facteur $\sqrt{4} = 2$).

Correction 5 — Conditionnement [Énoncé]

1. $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu;\, 4/\sqrt{64}) = \mathcal{N}(\mu;\, 0{,}5)$.
2. IC $= [502{,}5 \pm 1{,}96 \times 0{,}5] = [501{,}52\,;\, 503{,}48]$.
3. $500 \notin$ IC : la norme paraît *non respectée* à 95 %.

Correction 6 — Accessoire auto [Énoncé]

1. $\overline{M} \sim \mathcal{N}(\mu;\, 0{,}04)$.
2. IC 95% $= [32{,}15 \pm 1{,}96 \times 0{,}04] = [32{,}072\,;\, 32{,}228]$.
3. IC 99% $= [32{,}15 \pm 2{,}576 \times 0{,}04] = [32{,}047\,;\, 32{,}253]$: plus large (plus sûr mais moins précis).

Correction 7 — Plaques [Énoncé]

1. $\hat{p} = 12/200 = 0{,}06$.
2. $\sqrt{0{,}06 \times 0{,}94/200} \approx 0{,}0168$. IC $= [0{,}06 \pm 0{,}0329] = [0{,}027\,;\, 0{,}093]$.
3. $nf = 12 \geq 5$, $n(1-f) = 188 \geq 5$. OK.

Correction 8 — Comprimés [Énoncé]

1. $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu;\, 2/\sqrt{36}) = \mathcal{N}(\mu;\, 1/3)$.
2. IC 95% $= [103{,}4 \pm 1{,}96 \times 1/3] = [102{,}75\,;\, 104{,}05]$.
3. IC 90% $= [103{,}4 \pm 1{,}645 \times 1/3] = [102{,}85\,;\, 103{,}95]$ (plus étroit).

Correction 9 — Eau minérale [Énoncé]

1. $\hat{\mu} = 5{,}95$.
2. $\sigma/\sqrt{30} \approx 0{,}219$. IC $= [5{,}95 \pm 0{,}430] = [5{,}520\,;\,6{,}380]$.
3. $6{,}5 \notin$ IC $\Rightarrow \mu < 6{,}5$ avec confiance 95 %. L'eau n'est pas calcaire.

Correction 10 — Ketchup [Énoncé]

1. $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu;\, 3/\sqrt{40}) = \mathcal{N}(\mu;\, 0{,}4743)$.
2. IC $= [252{,}3 \pm 1{,}96 \times 0{,}4743] = [251{,}37\,;\,253{,}23]$.
3. $250 \notin$ IC : masse moyenne *significativement* au-dessus de 250 g.

Correction 11 — Récipients [Énoncé]

1. $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu;\, 0{,}2/\sqrt{25}) = \mathcal{N}(\mu;\, 0{,}04)$.
2. IC $= [60{,}05 \pm 1{,}96 \times 0{,}04] = [59{,}972\,;\,60{,}128]$.
3. $60 \in$ IC : cohérent avec le diamètre théorique.

Correction 12 — Estimation sans biais [Énoncé]

1. $\hat{\sigma} = s\sqrt{n/(n-1)} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\, s$.
2. $\hat{\sigma} = \sqrt{25/24} \times 0{,}48 \approx 0{,}4899$.
3. $\hat{\sigma}/\sqrt{25} \approx 0{,}098$. IC $= [12{,}35 \pm 1{,}96 \times 0{,}098] = [12{,}158\,;\,12{,}542]$.

Correction 13 — Conditions de validité [Énoncé]

1. $n = 50$: $nf = 2 < 5$ **non valide**.
2. $n = 200$: $nf = 8 \geq 5$, $n(1-f) = 192 \geq 5$ OK. IC $= [0{,}04 \pm 1{,}96\sqrt{0{,}04 \times 0{,}96/200}] = [0{,}013\,;\,0{,}067]$.
3. $nf \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 5/0{,}04 = 125$.

Correction 14 — Dimensionnement moyenne [Énoncé]

1. Par définition $h = z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$.
2. $h \leq 0{,}05 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 1{,}96 \times 0{,}3/0{,}05 = 11{,}76 \Rightarrow n \geq 139$.
3. $h \leq 0{,}02 \Rightarrow n \geq (1{,}96 \times 0{,}3/0{,}02)^2 = 864{,}4 \Rightarrow n \geq 865$.

Correction 15 — Dimensionnement proportion [Énoncé]

1. $p(1-p)$ maximal en $p = 1/2$: $p(1-p) \leq 1/4 \Rightarrow \sqrt{p(1-p)} \leq 1/2$.
2. Pire cas : $h = 1{,}96 \times (1/2)/\sqrt{n} \leq 0{,}03 \Rightarrow n \geq (1{,}96/(2 \times 0{,}03))^2 \approx 1067 \Rightarrow n \geq 1068$.
3. $p = 0{,}45$: $\sqrt{0{,}45 \times 0{,}55} \approx 0{,}4975$, $n \geq (1{,}96 \times 0{,}4975/0{,}03)^2 \approx 1057 \Rightarrow n \geq 1058$.

Correction 16 — Précision vs. taille [Énoncé]

1. $\sigma/\sqrt{36} \approx 0{,}0417$. IC $= [10{,}02 \pm 0{,}0817]$.
2. Pour h divisé par 2 : $n' = 4\,n_1 = 144$.
3. Pour h divisé par 3 : $n'' = 9\,n_1 = 324$.

Correction 17 — Niveau variable [Énoncé]

1. IC 90% $= [50{,}1 \pm 1{,}645 \times 0{,}08] = [49{,}968\,;\,50{,}232]$.
2. IC 95% $= [49{,}943\,;\,50{,}257]$; IC 99% $= [49{,}894\,;\,50{,}306]$.
3. Largeur croissante : 90% < 95% < 99%. Plus on veut de garantie, plus l'IC s'élargit.

Correction 18 — Contrôle qualité [Énoncé]

1. $\sqrt{0{,}08 \times 0{,}92/500} \approx 0{,}01213$. IC $= [0{,}08 \pm 0{,}0238] = [0{,}056\,;\,0{,}104]$.
2. $0{,}05 \notin$ IC : l'annonce fournisseur semble optimiste.
3. $h \leq 0{,}01 \Rightarrow n' \geq (1{,}96/0{,}01)^2 \times 0{,}08 \times 0{,}92 \approx 2828 \Rightarrow n' \geq 2829$.

Correction 19 — Institut [Énoncé]

1. Pire cas : $1{,}96\sqrt{0{,}25/1000} \approx 0{,}0310 \approx 3{,}1\%$: OK.
2. Marge exacte $= 1{,}96\sqrt{0{,}47 \times 0{,}53/1000} \approx 0{,}0309$.
3. IC $= [0{,}439\,;\,0{,}501]$.
4. $h \leq 0{,}02 \Rightarrow n' \geq 1{,}96^2 \times 0{,}25/0{,}02^2 = 2401$.
5. $0{,}5 \in$ IC (borne sup $= 0{,}501$) : **non**, on ne peut pas conclure à la minorité.

Correction 20 — Synthèse [Énoncé]

A. 1. $\hat{\mu} = 14{,}97$; $\hat{\sigma} = \sqrt{100/99} \times 0{,}20 \approx 0{,}2010$. 2. $\sigma_{\overline{X}} \approx 0{,}02010$. IC 95% $= [14{,}97 \pm 0{,}0394] = [14{,}931\,;\,15{,}009]$.
B. 3. $15{,}00 \in$ IC 95%. 4. IC 99% $= [14{,}97 \pm 0{,}0519] = [14{,}918\,;\,15{,}022]$; $15{,}00 \in$ IC. 5. Cahier des charges respecté à 95% comme à 99%.
C. 6. $1{,}96 \times 0{,}2010/\sqrt{n'} \leq 0{,}02 \Rightarrow n' \geq 388$. 7. $n'' \geq 670$.