DS Blanc n°1 — Durée 3 h

Contrôle qualité dans une usine agro-alimentaire

BTS MEC2 — Chapitre 3

SUJET — APERÇU

Sujet de bac blanc — format BTS. Il mobilise *toutes* les compétences du chapitre 3 : modélisation normale, échantillonnage, intervalle de confiance, tests de conformité (bilatéral, unilatéral) sur moyenne *et* proportion, comparaison d'échantillons, calcul de p-valeur.

Format. 3 exercices indépendants • durée 3 h • barème : Exo 1 : 8 pts (annale BTS), Exo 2 : 7 pts (annale BTS), Exo 3 : 5 pts (exo maison — comparaison) • calculatrice autorisée • résultats arrondis à 10^{-3} près • table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ fournie en annexe.

Exercice 1 — Conditionnement de pots de confiture BTS • Gr.B 2010 (1 h 15 — 8 pts) [Correction]

D'après BTS Groupement B, session 2010, épreuve B1 — machine de conditionnement.

Une entreprise agro-alimentaire conditionne des pots de confiture de masse nette annoncée 370 g. Pour un pot prélevé au hasard dans la production, on note X sa masse en g. On admet que X suit $\mathcal{N}(\mu\,;\,\sigma^2)$ avec $\sigma = 3$ g, connu et indépendant du réglage.

Partie A — Étude probabiliste. On admet dans cette partie que $\mu = 370$ g.

1. Calculer $P(X \geq 367)$. Interpréter.
2. Calculer $P(364 \leq X \leq 376)$.
3. Un pot est déclaré *hors norme* si sa masse n'appartient pas à $[364\,;\,376]$. Déterminer la probabilité pour qu'un pot prélevé au hasard soit hors norme.
4. Déterminer un intervalle symétrique centré en 370 contenant 99 % des masses.

Partie B — Échantillonnage et estimation. Le service qualité prélève $n = 64$ pots et mesure $\overline{x} = 368{,}5$ g.

5. Donner la loi de $\overline{X}$ en fonction de μ.
6. Donner une estimation ponctuelle de μ.
7. Déterminer un intervalle de confiance de μ au niveau 95 %, puis à 99 %.
8. L'entreprise garantit $\mu \geq 370$. Peut-elle maintenir sa garantie au niveau de confiance 95 % ?

Partie C — Test d'hypothèse. On souhaite tester, au seuil $\alpha = 5\,\%$:

$$H_0 \ : \ \mu = 370 \quad \text{contre} \quad H_1 \ : \ \mu < 370.$$

9. Déterminer la région critique.
10. Conclure à partir de l'échantillon observé.
11. Donner la p-valeur.
12. Si la vraie masse moyenne est $\mu_1 = 369$, calculer le risque β. Commenter la puissance du test.

Exercice 2 — Contrôle de la proportion d'étiquetage défaillant BTS • Gr.B 2006 (1 h — 7 pts) [Correction]

D'après BTS Groupement B, session 2006 — test sur proportion (chaudières reformulé).

Dans la même usine, on surveille la proportion p d'étiquettes mal posées sur les pots. Le processus est déclaré *sous contrôle* si $p \leq 0{,}02$.

Partie A — Prélèvement. Sur $n = 500$ pots prélevés au hasard, $k = 14$ présentent une étiquette défaillante.

1. Calculer la fréquence observée f.

2. Vérifier les conditions d'approximation normale de F sous $H_0 : p = 0{,}02$.
3. Tester au seuil 5 % l'hypothèse $H_0 : p = 0{,}02$ contre $H_1 : p > 0{,}02$ (test unilatéral droit).
4. Donner la p-valeur.

Partie B — Intervalle de confiance.

5. Donner un intervalle de confiance de p au niveau 95 %.
6. Commenter cohérence entre l'IC et le test du A.

Partie C — Taille d'échantillon.

7. Le service qualité souhaite estimer p avec une précision de $\pm 0{,}005$ au niveau 95 %. En prenant $p \approx 0{,}02$ pour dimensionner, quelle taille minimale d'échantillon est nécessaire ?

Exercice 3 — Comparaison de deux équipes *exo maison* **(45 min — 5 pts)** **[Correction]**

L'usine emploie deux équipes E_1 et E_2. On relève le nombre de pots conformes à l'heure.

Équipe	n	$\overline{x}$	σ
E_1	35	428	12
E_2	40	422	14

1. Tester l'égalité des moyennes au seuil 5 % (bilatéral). Conclure.
2. Donner la p-valeur.
3. Donner un IC à 95 % de $\mu_1 - \mu_2$.
4. L'équipe E_1 peut-elle prétendre être significativement plus performante (test unilatéral droit) ?

Corrigé — DS Blanc n°1

Contrôle qualité agro-alimentaire

BTS MEC2 — Chapitre 3

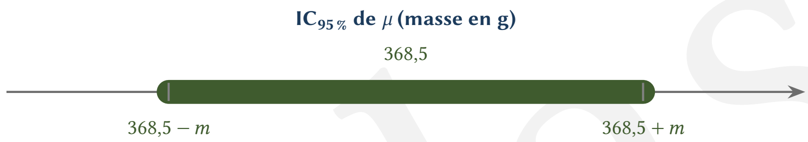
Correction 1 — Pots de confiture (8 pts) [Énoncé]

A.

1. $P(X \geq 367) = P(Z \geq -1) = \Phi(1) \approx 0{,}8413$.
2. $P(|Z| \leq 2) \approx 0{,}9544$.
3. $1 - 0{,}9544 = 0{,}0456$.
4. $[\,370 - 2{,}576 \times 3\,;\, 370 + 2{,}576 \times 3\,] = [\,362{,}27\,;\, 377{,}73\,]$.

B.

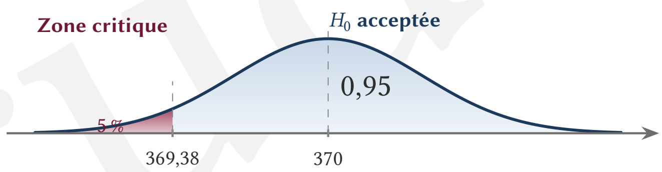
5. $\overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu\,;\, 3/8) = \mathcal{N}(\mu\,;\, 0{,}375)$.
6. $\hat{\mu} = 368{,}5$.
7. IC 95 % : $[368{,}5 \pm 1{,}96 \times 0{,}375] = [367{,}765\,;\, 369{,}235]$. IC 99 % : $[367{,}534\,;\, 369{,}466]$.



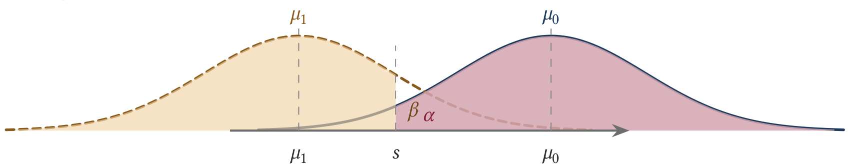
8. 370 n'appartient à aucun des deux IC : la garantie est mise en défaut au niveau 95 % (et même 99 %).

C.

9. RC : $\overline{X} < 370 - 1{,}645 \times 0{,}375 = 369{,}383$.



10. $368{,}5 < 369{,}383$: rejet. Le sous-poids est significatif.
11. $Z = -4\,;\, p = \Phi(-4) \approx 3{,}17 \cdot 10^{-5}$: rejet très net.
12. Sous $\mu = 369$: $\beta = P(\overline{X} \geq 369{,}383 \mid \mu = 369) = P(Z \geq 1{,}021) \approx 0{,}154$. Puissance $\approx 0{,}846$.



Correction 2 — Étiquetage (7 pts) [Énoncé]

A.

1. $f = 14/500 = 0{,}028$.
2. $np_0 = 10 \geq 5$, $n(1 - p_0) = 490 \geq 5$: OK.
3. Sous H_0 : $\sigma = \sqrt{0{,}02 \times 0{,}98/500} = 0{,}00626$. Seuil $0{,}02 + 1{,}645 \times 0{,}00626 = 0{,}0303$. $0{,}028 < 0{,}0303$: non-rejet.
4. $Z = 0{,}008/0{,}00626 = 1{,}278\,;\, p = 1 - \Phi(1{,}278) \approx 0{,}101$.

B.

5. $\sigma_F = \sqrt{0{,}028 \times 0{,}972/500} = 0{,}00738$; IC 95 % : $[0{,}0135\,;\, 0{,}0425]$.
6. L'IC contient 0,02, cohérent avec le non-rejet.

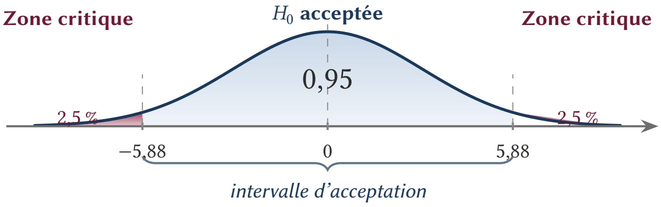
C.

7. $1{,}96\sqrt{0{,}02 \times 0{,}98/n} \leq 0{,}005$ donne $n \geq (1{,}96)^2 \times 0{,}0196/0{,}000025 = 3012$.

Correction 3 — Deux équipes (5 pts) [Énoncé]

Préliminaire. $\sigma_d = \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\dfrac{144}{35} + \dfrac{196}{40}} = \sqrt{9{,}014} \approx 3{,}002.$

1. $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ contre $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. Sous H_0 : $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim \mathcal{N}(0\,;\,3{,}002)$. $Z = (428 - 422)/3{,}002 = 1{,}999 \approx 2{,}000$. $|Z| > 1{,}96$ (à la limite) : **rejet**. L'écart observé de 6 pots/h est statistiquement significatif au seuil 5 %.



2. $p = 2\big(1 - \Phi(2{,}000)\big) \approx 0{,}0455$: tout juste inférieure à 5 %, ce qui confirme le caractère limite du rejet.
3. IC 95 % de $\mu_1 - \mu_2$: $6 \pm 1{,}96 \times 3{,}002 = [\,0{,}116\,;\,11{,}884\,]$. L'IC ne contient pas 0 (mais le frôle).
4. Test unilatéral droit $H_1 : \mu_1 > \mu_2$: seuil $z_{0{,}05} = 1{,}645$; $2{,}000 > 1{,}645$: **rejet**. L'équipe E_1 peut donc être considérée comme significativement plus performante que E_2. *Prudence* : la significativité étant marginale, un suivi sur plusieurs semaines est recommandé avant de généraliser.