Devoir surveillé blanc n°2

BTS MEC2 — Chapitre 2 • Format examen

Durée : 3 h • Calculatrice autorisée

Sujet en 2 exercices indépendants • Barème : 10 + 10 = 20 points

Exercice 1 — dsb2exo1 (Exercice 1 — Contrôle qualité à l'usine de préfabrication (inspiré AEA 2008) 10 points) [Cor

Une usine produit des blocs en béton cellulaire dont la masse M (kg) suit $\mathcal{N}(25\,;\,0{,}6)$.

Partie A.

1. Calculer $P(M \leq 24)$, $P(M \geq 26)$, $P(24 \leq M \leq 26)$.
2. Un bloc est accepté si $24 \leq M \leq 26$. Quelle est la probabilité qu'un bloc soit accepté ?
3. Sur la palette, on prélève au hasard $n = 60$ blocs indépendants. Soit Y le nombre de blocs acceptés. Donner la loi de Y, son espérance et son écart-type.
4. Justifier qu'on peut approcher Y par une loi normale et donner ses paramètres.
5. Avec correction de continuité, calculer $P(Y \geq 55)$.

Partie B — Approximation par Poisson.

6. Soit $D = 60 - Y$ le nombre de blocs non acceptés dans la palette. Justifier qu'on peut approcher la loi de D par une loi de Poisson, préciser son paramètre λ, et calculer $P(D \leq 3)$.
7. Comparer avec la valeur exacte (loi binomiale, calculatrice).

Correction 1 — dsb2exo1 (Exercice 1 — corrigé) [Énoncé]

Partie A.

1. $P(M \leq 24) = P(Z \leq -5/3) = P(Z \leq -1{,}667) \approx 0{,}048$; $P(M \geq 26) \approx 0{,}048$; $P(24 \leq M \leq 26) \approx 0{,}904$. [1,5 pt]
2. $p = P(24 \leq M \leq 26) \approx 0{,}904$. [0,5 pt]
3. $Y \sim \mathcal{B}(60\,;\,0{,}904)$; $E(Y) = 54{,}24$; $V(Y) = 60 \times 0{,}904 \times 0{,}096 \approx 5{,}207$; $\sigma(Y) \approx 2{,}282$. [1,5 pt]
4. $n = 60 \geq 30$, $np \approx 54{,}24 \geq 5$, $n(1-p) \approx 5{,}76 \geq 5$. $Y \approx \mathcal{N}(54{,}24\,;\,2{,}282)$. [1 pt]
5. $P(Y \geq 55) \approx P(Y' \geq 54{,}5) = P(Z \geq (54{,}5 - 54{,}24)/2{,}282) = P(Z \geq 0{,}114) \approx 0{,}455$. [2 pt]

Partie B.

6. $D \sim \mathcal{B}(60\,;\,0{,}096)$. $n = 60 \geq 30$, $p = 0{,}096 \leq 0{,}1$ (limite), $np = 5{,}76 \leq 10$. Approximation $D \approx \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = 5{,}76$.
$Z \sim \mathcal{P}(5{,}76)$: $P(Z \leq 3) \approx 0{,}170$. [2,5 pt]
7. Valeur exacte : $P(D \leq 3)$ avec $\mathcal{B}(60\,;\,0{,}096) \approx 0{,}186$ (calculatrice). Approximation correcte à $\sim 0{,}02$ près. [1 pt]

Exercice 1 — dsb2exo2 (Exercice 2 — Graphe probabiliste et loi exponentielle (état d'une bétonnière) 10 points) [Co

Une bétonnière peut se trouver chaque jour dans l'un des trois états : neuf (N), usagé (U), en panne (P). Les transitions d'un jour au suivant sont gouvernées par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}25 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(État « en panne » absorbant : une fois en panne, la bétonnière n'est pas réparée.)

Partie A.

1. Expliquer, en une ou deux phrases, le sens de chacun des coefficients de M.
2. En jour 1, la bétonnière est neuve : $X_1 = (1\,;\,0\,;\,0)$. Calculer X_2, X_3, X_4.

3. Calculer P(panne au bout de 5 jours). (Indication : $P_5 = 1 - (X_5)_1 - (X_5)_2$.)

Partie B. On modélise désormais la durée de vie T (en jours) avant panne par une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$. Les données précédentes suggèrent $E(T) \approx 13$ jours.

4. En déduire λ (arrondi à 10^{-3}).
5. Calculer $P(T \leq 5)$, $P(T \geq 20)$, $P(10 \leq T \leq 30)$.
6. Sachant que la bétonnière est en fonction depuis 10 jours, quelle est la probabilité qu'elle tombe en panne dans les 5 prochains jours ?

Partie C — Comparaison.

7. Le modèle discret de la partie A et le modèle continu de la partie B donnent-ils des résultats compatibles pour « panne au bout de 5 jours » ? Commenter la précision de chaque modèle.

Correction 1 — dsb2exo2 (Exercice 2 — corrigé) [Énoncé]

Partie A.

1. Ligne N : si la bétonnière est neuve, elle reste neuve avec 0,7, passe usagée avec 0,25, tombe en panne avec 0,05. Ligne U : usagée reste usagée avec 0,8, tombe en panne avec 0,2 (et ne redevient jamais neuve). Ligne P : absorbant (reste en panne avec 1). [1,5 pt]

2. $X_2 = (0{,}7\,;\,0{,}25\,;\,0{,}05)$.
$X_3 = X_2M = (0{,}7\times0{,}7\,;\,0{,}7\times0{,}25+0{,}25\times0{,}8\,;\,0{,}7\times0{,}05+0{,}25\times0{,}2+0{,}05) = (0{,}49\,;\,0{,}375\,;\,0{,}135)$.
$X_4 = X_3M = (0{,}49\times0{,}7\,;\,0{,}49\times0{,}25+0{,}375\times0{,}8\,;\,0{,}49\times0{,}05+0{,}375\times0{,}2+0{,}135) = (0{,}343\,;\,0{,}4225\,;\,0{,}2345)$. [2,5 pt]

3. $X_5 = X_4M = (0{,}343\times0{,}7\,;\,0{,}343\times0{,}25+0{,}4225\times0{,}8\,;\,0{,}343\times0{,}05+0{,}4225\times0{,}2+0{,}2345) = (0{,}2401\,;\,0{,}4238\,;\,0{,}3361)$.
Probabilité de panne au bout de 5 jours : $\approx 0{,}336$. [1,5 pt]

Partie B.

4. $\lambda = 1/13 \approx 0{,}0769$. [0,5 pt]

5. $P(T \leq 5) = 1 - \mathrm{e}^{-5/13} \approx 1 - \mathrm{e}^{-0{,}385} \approx 0{,}319$; $P(T \geq 20) = \mathrm{e}^{-20/13} \approx 0{,}215$; $P(10 \leq T \leq 30) = \mathrm{e}^{-10/13} - \mathrm{e}^{-30/13} \approx 0{,}463 - 0{,}100 = 0{,}363$. [2 pt]

6. Par absence de mémoire : $P_{T\geq10}(T \leq 15) = P(T \leq 5) \approx 0{,}319$. [1 pt]

Partie C.

7. Modèle discret (Partie A) : $P(\text{panne} \leq 5 \text{ jours}) \approx 0{,}336$. Modèle continu (Partie B) : $\approx 0{,}319$. Valeurs voisines : le modèle exponentiel est une approximation plausible du modèle à trois états, avec une précision de l'ordre de 0,02. Le modèle discret est plus précis car il respecte la structure « neuf → usagé → panne » (phase hors-service induite par l'usure) ; la loi exponentielle suppose une absence de mémoire peu compatible avec l'usure. [1 pt]