Devoir surveillé blanc n°1

BTS MEC2 — Chapitre 2 • Format examen

Durée : 3 h • Calculatrice autorisée

Sujet en 2 exercices indépendants • Barème : $12 + 8 = 20$ points
Les résultats seront donnés à 10^{-3} près. Rédaction très soignée exigée.

Exercice 1 — dsb1exo1 (Exercice 1 — Épaisseur de plaques en fibro-ciment (inspiré de GrB 2005) 12 points) [Correc

Une usine produit en grande quantité des plaques de fibro-ciment destinées à la couverture. L'épaisseur X (en mm) d'une plaque prélevée au hasard suit une loi normale $\mathcal{N}(8\,;\,0{,}4)$. **Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.**

Partie A — Loi normale.

1. Calculer $P(X \leq 7)$, $P(X \geq 9)$, $P(7 \leq X \leq 9)$.
2. Une plaque est conforme si son épaisseur appartient à $[7{,}2\,;\,8{,}8]$. Calculer la probabilité p qu'une plaque soit conforme.
3. Déterminer le plus grand réel a tel que $P(8 - a \leq X \leq 8 + a) \geq 0{,}95$.

Partie B — Loi binomiale et approximation normale. On prélève un échantillon de $n = 120$ plaques (avec remise). Soit Y le nombre de plaques conformes.

4. Donner la loi de Y. Calculer $E(Y)$, $\sigma(Y)$.
5. Justifier qu'on peut approcher Y par une loi normale dont on donnera les paramètres.
6. Avec correction de continuité, calculer $P(Y \geq 110)$ et $P(100 \leq Y \leq 115)$.

Partie C — Somme de deux plaques. On empile deux plaques aléatoires indépendantes $X_1 \sim \mathcal{N}(8\,;\,0{,}4)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(8\,;\,0{,}4)$. Soit $S = X_1 + X_2$ l'épaisseur totale.

7. Donner la loi de S, $E(S)$, $\sigma(S)$.
8. Calculer $P(15{,}5 \leq S \leq 16{,}5)$.

Correction 1 — dsb1exo1 (Exercice 1 — corrigé) [Énoncé]

Partie A.

1. $P(X \leq 7) = P(Z \leq -2{,}5) \approx 0{,}0062$; $P(X \geq 9) = P(Z \geq 2{,}5) \approx 0{,}0062$; $P(7 \leq X \leq 9) \approx 0{,}9876$. [1,5 pt]
2. $P(7{,}2 \leq X \leq 8{,}8) = P(|Z| \leq 2) \approx 0{,}954$. $p = 0{,}954$. [1 pt]
3. $P(|X - 8| \leq a) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow a/0{,}4 \geq 1{,}96 \Leftrightarrow a \geq 0{,}784$ mm. [1,5 pt]

Partie B.

4. $Y \sim \mathcal{B}(120\,;\,0{,}954)$. $E(Y) = 114{,}5$; $V(Y) = 120 \times 0{,}954 \times 0{,}046 \approx 5{,}266$; $\sigma(Y) \approx 2{,}295$. [1,5 pt]
5. $n = 120 \geq 30$, $np = 114{,}5 \geq 5$, $n(1-p) = 5{,}5 \geq 5$ (limite mais OK) : $Y \approx \mathcal{N}(114{,}5\,;\,2{,}295)$. [1 pt]
6. $P(Y \geq 110) \approx P(Y' \geq 109{,}5) = P(Z \geq (109{,}5 - 114{,}5)/2{,}295) = P(Z \geq -2{,}179) \approx 0{,}985$.
$P(100 \leq Y \leq 115) \approx P(99{,}5 \leq Y' \leq 115{,}5) = P(-6{,}535 \leq Z \leq 0{,}436) \approx 0{,}668$. [2 pt]

Partie C.

7. Somme de deux normales indépendantes : $S \sim \mathcal{N}(16\,;\,\sqrt{2 \times 0{,}16}) = \mathcal{N}(16\,;\,\sqrt{0{,}32}) \approx \mathcal{N}(16\,;\,0{,}566)$. [1,5 pt]
8. $P(15{,}5 \leq S \leq 16{,}5) = P(|Z| \leq 0{,}5/0{,}566) = P(|Z| \leq 0{,}884) \approx 0{,}623$. [2 pt]

Exercice 1 — dsb1exo2 (Exercice 2 — Fiabilité d'un ascenseur (loi exponentielle) 8 points) [Correction]

Sur un immeuble en construction, un ascenseur a une durée de vie T (en années) modélisée par une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On admet MTBF = 15 ans.

1. Donner λ.
2. Calculer $P(T \leq 5)$, $P(T \geq 20)$, $P(10 \leq T \leq 25)$.

3. Démontrer la propriété d'absence de mémoire : pour $s, t \geq 0$, $P_{T \geq s}(T \geq s+t) = P(T \geq t)$. Appliquer avec $s = 10$, $t = 5$.
4. L'immeuble est équipé de 4 ascenseurs indépendants et neufs. Soit N le nombre d'ascenseurs encore fonctionnels après 10 ans. Donner la loi de N, $E(N)$, $P(N = 0)$.
5. Calculer, par intégration de la densité, $P(T \geq 20)$. Comparer à la question 2.

Correction 1 — dsb1exo2 (Exercice 2 — corrigé) [Énoncé]

1. $\lambda = 1/15 \approx 0{,}0667$ /an. [0,5 pt]
2. $P(T \leq 5) = 1 - e^{-1/3} \approx 0{,}283$; $P(T \geq 20) = e^{-4/3} \approx 0{,}264$; $P(10 \leq T \leq 25) = e^{-2/3} - e^{-5/3} \approx 0{,}513 - 0{,}189 = 0{,}325$. [2 pt]
3. $P_{T \geq s}(T \geq s+t) = \dfrac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(T \geq t)$. Avec $s = 10$, $t = 5$: $P_{T \geq 10}(T \geq 15) = e^{-1/3} \approx 0{,}717$. [2 pt]
4. $p = P(T \geq 10) = e^{-2/3} \approx 0{,}513$. $N \sim \mathscr{B}(4\,;\,0{,}513)$; $E(N) \approx 2{,}053$; $P(N = 0) = (1 - 0{,}513)^4 \approx 0{,}056$. [2 pt]
5. $P(T \geq 20) = \int_{20}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_{20}^{+\infty} = e^{-20/15} = e^{-4/3} \approx 0{,}264$. Identique. [1,5 pt]