Chapitre 2

Lois à densité, loi normale, exponentielle, Poisson & graphe probabiliste

Table des matières

PROGRAMME BO — BTS ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

Contenus : Loi à densité sur un intervalle. Loi uniforme (rappel). Loi normale $\mathscr{N}(\mu, \sigma)$. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale ; théorème central limite (admis). Somme et différence de variables indépendantes ; espérance et variance. Loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$; absence de mémoire et fiabilité ; MTBF. Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$; approximation de la loi binomiale. Graphe probabiliste à 2 ou 3 sommets ; matrice de transition ; distribution stationnaire.

Démonstrations : Espérance et variance d'une loi uniforme (admises). Caractérisation de la loi exponentielle par l'absence de mémoire. Conditions et mise en œuvre des approximations $\mathscr{B}(n, p) \to \mathscr{N}$ et $\mathscr{B}(n, p) \to \mathscr{P}$. Distribution stationnaire d'un graphe probabiliste.

Capacités : Reconnaître la loi adaptée à une situation. Utiliser la calculatrice (ou un tableur) pour obtenir les probabilités usuelles. Appliquer les conditions d'approximation ; interpréter MTBF, quantile et distribution stationnaire dans un contexte de BTP, préfabrication ou maintenance.

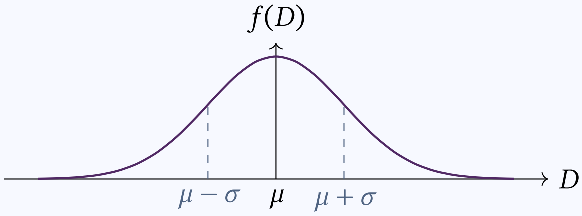
Tout le cours

Positionnement dans l'année

Ce chapitre 2 prolonge les outils du Ch. 1 (Bernoulli, binomiale, uniforme) vers les lois *à densité* les plus utiles sur chantier et en préfabrication : la loi **normale** (dispersions de fabrication, contrôle qualité), la loi **exponentielle** (durée de vie d'un composant, fiabilité d'un équipement) et la loi de **Poisson** (nombre d'incidents par jour, par kilomètre…). Il se termine par un outil plus combinatoire : le **graphe probabiliste**, très utile pour modéliser un système qui alterne entre plusieurs états (machine neuve / usée / en panne, par exemple).

Activité d'introduction n°1 — diamètre d'un fer à béton

Une entreprise de préfabrication produit des fers à béton de diamètre nominal $\mu = 12$ mm. Sur un échantillon de 1 000 pièces, on mesure le diamètre D de chaque fer : les résultats forment une courbe en cloche (symétrique, centrée sur 12 mm) avec un écart-type $\sigma \approx 0{,}08$ mm. L'histogramme suggère une *loi continue* : on ne peut pas calculer $P(D = 12)$ (qui vaut 0), mais on peut calculer $P(11{,}9 \leq D \leq 12{,}1)$.



Question : si $D \sim \mathcal{N}(12;\, 0{,}08)$, quelle est la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard soit *hors tolérance* $[11{,}9\,;\, 12{,}1]$?

Activité d'introduction n°2 — durée de vie d'un vibrateur

Un vibrateur pneumatique (coffrage béton) a une durée de vie moyenne $\tau = 4\,000$ heures de fonctionnement. On admet que la durée de vie T (en heures) suit une loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda = 1/\tau$.
Question :

1. Quelle est la probabilité que l'appareil tombe en panne avant 1 000 h ?
2. Sachant qu'il fonctionne encore à 3 000 h, quelle est la probabilité qu'il tienne encore 1 000 h ?

On verra que cette probabilité *ne dépend pas* de l'historique : c'est l'*absence de mémoire* de la loi exponentielle.

Activité d'introduction n°3 — incidents quotidiens sur chantier

Sur un chantier, on relève chaque jour le nombre de petits incidents matériels (outils cassés, coffrages perdus, etc.). En moyenne, on compte $\lambda = 2{,}5$ incidents par jour ; les incidents sont très nombreux et indépendants.

— P(aucun incident un jour donné) = ?
— P(au plus 2 incidents) = ?

La loi adaptée est la *loi de Poisson* $\mathscr{P}(\lambda)$.

1. Loi à densité : rappel

Une variable aléatoire X est dite *à densité* sur un intervalle I s'il existe une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+$ continue (ou continue par morceaux) telle que :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pour tous } a \leq b \text{ dans } I.$$

On a nécessairement $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Pour tout $x_0 \in I$, $P(X = x_0) = 0$: les inégalités strictes ou larges donnent la même probabilité.

Espérance et variance

$$E(X) = \int_I t\,f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad V(X) = \int_I (t - E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

2. Loi uniforme $\mathcal{U}([a\,;b])$ (rappel Ch. 1)

Loi uniforme

$X \sim \mathcal{U}([a\,;b])$: $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ sur $[a, b]$, 0 ailleurs.

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a} \quad (a \leq c \leq d \leq b), \quad E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

3. Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de densité $f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

— Courbe en cloche symétrique, d'axe $t = \mu$, de paramètre d'étalement $\sigma > 0$.

— $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$.

Intervalles de référence (68-95-99,7)

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0{,}683, \; P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0{,}954, \; P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0{,}997.$$

À la calculatrice, on obtient directement $P(a \le X \le b)$ avec la commande `NormalCdf(a,b,μ,σ)` (TI) ou `NormCD` (Casio). Pour une valeur unique $P(X \le b)$, on prend $a = -10^{99}$; pour $P(X \ge a)$, on prend $b = +10^{99}$.

4. Approximation $\mathscr{B}(n, p) \to \mathcal{N}$

Théorème de Moivre–Laplace (admis)

Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ avec $n \ge 30$, $np \ge 5$ et $n(1-p) \ge 5$, on peut approcher la loi de X par une loi normale de mêmes paramètres :

$$X \overset{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}\left(np\,;\, \sqrt{np(1-p)}\right).$$

Comme on passe d'une loi discrète à une loi continue, on *centre* les bornes : pour k entier,

$$P(X \le k) \approx P(Y \le k + 0{,}5), \qquad P(X \ge k) \approx P(Y \ge k - 0{,}5), \qquad P(X = k) \approx P(k - 0{,}5 \le Y \le k + 0{,}5).$$

5. Somme, différence et TLC

Transformation affine $aX + b$

Pour toute variable aléatoire X et tous réels a, b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \qquad V(aX + b) = a^2\, V(X), \qquad \sigma(aX + b) = |a|\, \sigma(X).$$

Si de plus $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b\,;\, |a|\sigma)$.

Combinaison de variables indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires *indépendantes*. Alors :

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y), \qquad V(X \pm Y) = V(X) + V(Y).$$

De plus, si $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ sont indépendantes :

$$X \pm Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_1 \pm \mu_2\,;\, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right).$$

Théorème central limite (admis)

Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires *indépendantes*, de même loi, d'espérance μ et d'écart-type σ, alors, pour n grand ($n \ge 30$ en pratique), la moyenne empirique $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum X_i$ suit approximativement :

$$\overline{X} \overset{\text{approx.}}{\sim} \mathcal{N}\left(\mu\,;\, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

6. Loi exponentielle $\mathscr{E}(\lambda)$

$T \sim \mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ si T est à densité sur $[0, +\infty[$:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ pour } t \geq 0, \quad 0 \text{ sinon.}$$

Probabilités classiques

Pour $T \sim \mathscr{E}(\lambda)$ et $0 \leq a \leq b$:

$$P(T \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}, \quad P(T \geq a) = e^{-\lambda a}, \quad P(a \leq T \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{(MTBF / durée de vie moyenne)}, \qquad V(T) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Pour $T \sim \mathscr{E}(\lambda)$ et $s, t \geq 0$:

$$P_{T \geq s}(T \geq s + t) = \frac{P(T \geq s + t)}{P(T \geq s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(T \geq t).$$

La probabilité de tenir encore t heures *ne dépend pas* de l'âge : la loi exponentielle modélise donc une *pièce sans usure*. C'est une propriété caractéristique.

On appelle *fiabilité* à l'instant t la probabilité $R(t) = P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$. L'*MTBF* (Mean Time Between Failures) est $E(T) = 1/\lambda$. Exemple : pour une bétonnière dont $\lambda = 10^{-4}$ /h, MTBF = 10 000 h ; après 5 000 h d'usage, $R = e^{-0,5} \approx 0,607$.

7. Loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$

Une variable aléatoire discrète Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et :

$$P(Z = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On a $E(Z) = V(Z) = \lambda$.

Approximation de la binomiale

Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ avec n grand ($n \geq 30$), p petit ($p \leq 0,1$) et $np \leq 10$:

$$X \overset{\text{approx.}}{\sim} \mathscr{P}(\lambda), \quad \lambda = np.$$

La loi de Poisson modélise le nombre d'événements « rares » qui se produisent dans une fenêtre donnée (intervalle de temps, surface, distance) lorsque ces événements sont nombreux, isolés et indépendants : incidents par jour, défauts par kilomètre de route, retards de livraison par semaine, etc.

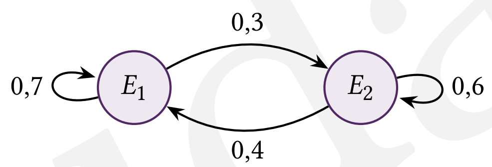
8. Graphe probabiliste (variante MEC)

Un *graphe probabiliste* décrit un système qui peut se trouver dans plusieurs *états* $E_1, \dots, E_r$ et qui change d'état à chaque étape. Les arêtes orientées portent les probabilités de transition : $p_{ij} = P(\text{état } E_j \text{ à l'étape } n+1 \mid \text{état } E_i \text{ à l'étape } n)$. On suppose ces probabilités constantes et on note :

$$M = (p_{ij})_{1\le i,j\le r}, \quad \text{matrice de transition (lignes de somme 1).}$$

La distribution à l'étape n est la ligne $X_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_r^{(n)})$. On a :

$$X_{n+1} = X_n M, \qquad X_n = X_0 M^n.$$



Distribution stationnaire

Une distribution $X^\star = (x_1^\star, \dots, x_r^\star)$ est *stationnaire* (ou invariante) si $X^\star M = X^\star$ et $x_1^\star + \dots + x_r^\star = 1$. Si la matrice M est à coefficients strictement positifs (ou, plus largement, si le graphe est « fortement connexe »), la suite (X_n) converge vers cette unique distribution $X^\star$, *quelle que soit* X_0.

En pratique (cas $r = 2$), on résout :

$$\begin{cases} a\,x_1^\star + c\,x_2^\star = x_1^\star \\ x_1^\star + x_2^\star = 1 \end{cases} \quad \text{avec } M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-b & b \end{pmatrix},$$

ce qui donne $x_1^\star = \dfrac{1-b}{2-a-b}$ et $x_2^\star = \dfrac{1-a}{2-a-b}$.

Synthèse du chapitre

Loi	**Contexte typique MEC**	$E(X)$	$V(X)$
$\mathscr{U}([a,b])$	délai, temps d'attente connu borné	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
$\mathscr{N}(\mu,\sigma)$	dispersion de fabrication, contrôle dimension	μ	σ^2
$\mathscr{E}(\lambda)$	durée de vie, fiabilité, MTBF	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$\mathscr{P}(\lambda)$	nombre d'incidents/jour, défauts/km	λ	λ
$\mathscr{B}(n,p)$	succès sur n essais indépendants	np	$np(1-p)$

Approximations au programme :
- $\mathscr{B}(n,p) \to \mathscr{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ si $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$.
- $\mathscr{B}(n,p) \to \mathscr{P}(np)$ si $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$, $np \leq 10$.
- TLC : $\overline{X} \approx \mathscr{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$ si n grand.