Devoir surveillé blanc n°2

BTS MEC2 — Chapitre 1 • Format examen

Durée : 3 h • Calculatrice autorisée

Sujet en 2 exercices indépendants • Barème : $10 + 10 = 20$ points

Exercice 1 — dsb2exo1 (Exercice 1 — Assurance et loi binomiale (inspiré de GrB 2002) 10 points) [Correction]

Une compagnie d'assurance spécialisée dans les risques de chantier étudie les sinistres déclarés sur l'année écoulée. On note E l'événement : « un chantier, choisi au hasard dans le portefeuille, n'a déclaré aucun sinistre dans l'année ». On suppose $P(E) = 0{,}7$.

Partie A — Un échantillon. On sélectionne au hasard $n = 10$ chantiers (les chantiers sont supposés indépendants). Soit X le nombre de chantiers sans sinistre parmi les 10.

1. Justifier que $X \sim \mathscr{B}(10\,;\,0{,}7)$ et calculer $E(X)$, $\sigma(X)$.
2. Calculer $P(X = 10)$, $P(X = 7)$, $P(X \geq 7)$, tous à 10^{-3} près.

Partie B — Un échantillon plus grand. L'assureur prélève cette fois un échantillon de $n = 30$ chantiers. Soit Y le nombre de chantiers sans sinistre. On admet que cette situation est toujours modélisable par un schéma de Bernoulli de paramètres $(30\,;\,0{,}7)$.

3. Calculer $E(Y)$, $V(Y)$, $\sigma(Y)$.
4. Calculer $P(Y \geq 25)$, $P(18 \leq Y \leq 24)$.
5. L'assureur considère qu'il y a « dérive » du portefeuille si $Y \leq 15$. Quelle est la probabilité de dérive ?

Partie C — Dossiers contentieux. Parmi les chantiers *ayant déclaré un sinistre* sur l'année (soit la fraction $\bar{E}$ de probabilité 0,3), une proportion 0,25 a fait l'objet d'un contentieux. On prélève un chantier au hasard dans *l'ensemble* du portefeuille ; notons C : « le chantier a fait l'objet d'un contentieux ».

6. Expliquer pourquoi $P(C \mid E) = 0$. En déduire $P(C)$.
7. Un chantier a fait l'objet d'un contentieux. Quelle est la probabilité qu'il ait déclaré un sinistre ? Commenter.

Correction 1 — dsb2exo1 (Exercice 1 — corrigé) [Énoncé]

Partie A.

1. 10 épreuves identiques indépendantes, $p = 0{,}7$: $X \sim \mathscr{B}(10\,;\,0{,}7)$; $E(X) = 7$; $V(X) = 2{,}1$; $\sigma(X) \approx 1{,}449$. [1,5 pt]

2. $P(X = 10) = 0{,}7^{10} \approx 0{,}028$.
$P(X = 7) = \binom{10}{7} \times 0{,}7^7 \times 0{,}3^3 = 120 \times 0{,}0824 \times 0{,}027 \approx 0{,}267$.
$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) \approx 1 - 0{,}350 = 0{,}650$. [2 pt]

Partie B.

3. $Y \sim \mathscr{B}(30\,;\,0{,}7)$; $E(Y) = 21$; $V(Y) = 6{,}3$; $\sigma(Y) \approx 2{,}510$. [1,5 pt]

4. $P(Y \geq 25) = 1 - P(Y \leq 24) \approx 1 - 0{,}922 = 0{,}078$.
$P(18 \leq Y \leq 24) = P(Y \leq 24) - P(Y \leq 17) \approx 0{,}922 - 0{,}113 = 0{,}809$. [2 pt]

5. $P(Y \leq 15) \approx 0{,}017$: faible risque (en moyenne, moins de 2 % des années montrent une telle dérive). [1,5 pt]

Partie C.

6. Par définition, E : « aucun sinistre ». Sans sinistre, pas de contentieux : $P(C \mid E) = 0$.
Par probabilités totales : $P(C) = P(E) \times 0 + P(\bar{E}) \times 0{,}25 = 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}075$. [1 pt]

7. $P_C(\bar{E}) = \dfrac{P(\bar{E} \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}075}{0{,}075} = 1$. Autrement dit : *tout* contentieux provient nécessairement d'un chantier ayant déclaré un sinistre, ce qui est cohérent avec le calcul de la question précédente (le contentieux est *conditionnel* à la déclaration de sinistre). [1,5 pt]

Exercice 1 — dsb2exo2 (Exercice 2 — Probabilités conditionnelles, indépendance, loi binomiale 10 points) [Correcti

Une entreprise du BTP fait contrôler des éléments de charpente par deux laboratoires indépendants, L_1 (interne) et L_2 (externe). On admet que :

— la probabilité qu'un élément soit réellement non conforme est $q = 0{,}08$;
— sachant qu'un élément est non conforme, L_1 le détecte avec probabilité 0,90 ; L_2 avec probabilité 0,95 ;
— sachant qu'un élément est conforme, L_1 déclare à tort un défaut avec probabilité 0,02 ; L_2 avec probabilité 0,03.

On prélève un élément au hasard. On note N : « l'élément est non conforme », D_i : « L_i déclare un défaut » ($i = 1, 2$). On suppose les déclarations des deux laboratoires *indépendantes sachant* l'état réel de l'élément.

1. Calculer $P(D_1)$ et $P(D_2)$.
2. Calculer $P(D_1 \cap D_2)$ (en utilisant l'indépendance sachant N et sachant $\bar{N}$).
3. Un élément est déclaré défectueux par les deux laboratoires. Quelle est la probabilité qu'il soit réellement non conforme ?
4. Un élément est déclaré défectueux par L_1 seulement. Quelle est la probabilité qu'il soit réellement non conforme ?
5. Sur une semaine, 60 éléments sont prélevés au hasard, indépendamment. Soit M le nombre d'éléments *déclarés défectueux par les deux laboratoires*. Donner la loi de M, son espérance et $P(M \leq 5)$.

Correction 1 — dsb2exo2 (Exercice 2 — corrigé) [Énoncé]

Notations : $P(N) = q = 0{,}08$, $P(\bar{N}) = 0{,}92$; $\alpha_i = P(D_i \mid N)$, $\beta_i = P(D_i \mid \bar{N})$: $\alpha_1 = 0{,}90$, $\alpha_2 = 0{,}95$, $\beta_1 = 0{,}02$, $\beta_2 = 0{,}03$.

1. Probabilités totales :
$P(D_1) = q\alpha_1 + (1-q)\beta_1 = 0{,}08 \times 0{,}90 + 0{,}92 \times 0{,}02 = 0{,}072 + 0{,}0184 = 0{,}0904$.
$P(D_2) = 0{,}08 \times 0{,}95 + 0{,}92 \times 0{,}03 = 0{,}076 + 0{,}0276 = 0{,}1036$. [2 pt]

2. Indépendance conditionnelle : $P(D_1 \cap D_2 \mid N) = \alpha_1\alpha_2 = 0{,}855$; $P(D_1 \cap D_2 \mid \bar{N}) = \beta_1\beta_2 = 0{,}0006$.
$P(D_1 \cap D_2) = q \times 0{,}855 + (1-q) \times 0{,}0006 = 0{,}08 \times 0{,}855 + 0{,}92 \times 0{,}0006 = 0{,}0684 + 0{,}00055 \approx 0{,}0690$.
Remarque : D_1 et D_2 ne sont pas indépendants ; l'état réel N induit une corrélation. [2 pt]

3. $P_{D_1 \cap D_2}(N) = \dfrac{P(N \cap D_1 \cap D_2)}{P(D_1 \cap D_2)} = \dfrac{0{,}0684}{0{,}0690} \approx 0{,}991$.
Deux déclarations concordantes donnent une probabilité de non-conformité très élevée (99,1 %). [2 pt]

4. « Déclaré défectueux par L_1 seulement » : événement $D_1 \cap \bar{D}_2$.
$P(D_1 \cap \bar{D}_2 \mid N) = \alpha_1(1-\alpha_2) = 0{,}90 \times 0{,}05 = 0{,}045$; $P(D_1 \cap \bar{D}_2 \mid \bar{N}) = \beta_1(1-\beta_2) = 0{,}02 \times 0{,}97 = 0{,}0194$.
$P(D_1 \cap \bar{D}_2) = 0{,}08 \times 0{,}045 + 0{,}92 \times 0{,}0194 = 0{,}0036 + 0{,}01785 \approx 0{,}02145$.
$P_{D_1 \cap \bar{D}_2}(N) = \dfrac{0{,}0036}{0{,}02145} \approx 0{,}168$.
Une seule déclaration « défectueux » n'est guère probante : il n'y a que 16,8 % de chances que l'élément soit réellement non conforme. [2 pt]

5. $p = P(D_1 \cap D_2) \approx 0{,}0690$; $M \sim \mathscr{B}(60\,;\,0{,}0690)$; $E(M) = 60 \times 0{,}0690 = 4{,}14$; $P(M \leq 5) \approx 0{,}773$ (calculatrice). [2 pt]