Devoir surveillé blanc n°1

BTS MEC2 — Chapitre 1 • Format examen

Durée : 3 h • Calculatrice autorisée

Sujet en 2 exercices indépendants • Barème : 12 + 8 = 20 points
Les résultats seront donnés à 10^{-3} près. Rédaction très soignée exigée.

Exercice 1 — dsb1exo1 (Exercice 1 — Contrôle qualité en usine de préfabrication (inspiré de GrB 2001) 12 points) [C

Une entreprise fabrique en grande quantité des dalles de béton préfabriquées. Chaque dalle doit vérifier deux critères : une longueur et une largeur, toutes deux exprimées en centimètres. **Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.** Dans ce qui suit, les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3}.

Partie A — Loi binomiale. On note E l'événement : « une dalle prélevée au hasard dans le stock est conforme (critère longueur) ». On admet $P(E) = 0{,}9$. On prélève au hasard 10 dalles dans le stock. Le stock est assez important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de dalles conformes parmi les 10.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que 8 dalles au moins soient conformes.
3. Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Partie B — Loi binomiale, effectif plus grand. Sur la production d'une journée, on prélève au hasard 40 dalles. Soit Y le nombre de dalles conformes.

4. Donner la loi de Y, son espérance et son écart-type.
5. Calculer $P(Y \geq 38)$.
6. L'entreprise estime la production « satisfaisante » si au moins 37 dalles sur 40 sont conformes. Calculer la probabilité que cette condition soit satisfaite.

Partie C — Probabilités conditionnelles. Deux machines M_1 et M_2 fabriquent les dalles. M_1 fournit 60 % de la production, M_2 le reste. La probabilité qu'une dalle de M_1 soit conforme est $p_1 = 0{,}914$, celle d'une dalle de M_2 est $p_2 = 0{,}879$. On prélève au hasard une dalle dans la production totale de la journée. On définit :
A : « la dalle provient de M_1 » ; B : « la dalle provient de M_2 » ; C : « la dalle est conforme ».

7. Déterminer $P(A)$, $P(B)$, $P_A(C)$, $P_B(C)$.
8. En déduire $P(C \cap A)$ et $P(C \cap B)$.
9. En admettant que $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$ (réunion disjointe), calculer $P(C)$.
10. Une dalle est conforme. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de M_2 ?

Correction 1 — dsb1exo1 (Exercice 1 — corrigé) [Énoncé]

Partie A.

1. Schéma de Bernoulli, $n = 10$, $p = 0{,}9$: $X \sim \mathscr{B}(10\,;\,0{,}9)$. [1,5 pt]

2. $P(X \geq 8) = \binom{10}{8} \times 0{,}9^8 \times 0{,}1^2 + 10 \times 0{,}9^9 \times 0{,}1 + 0{,}9^{10} \approx 0{,}194 + 0{,}387 + 0{,}349 = 0{,}930$. [2 pt]

3. $E(X) = 9$; $\sigma(X) = \sqrt{0{,}9} \approx 0{,}949$. [1 pt]

Partie B.

4. $Y \sim \mathscr{B}(40\,;\,0{,}9)$; $E(Y) = 36$; $\sigma(Y) = \sqrt{3{,}6} \approx 1{,}897$. [1 pt]

5. $P(Y \geq 38) = P(Y = 38) + P(Y = 39) + P(Y = 40) \approx 0{,}142 + 0{,}066 + 0{,}015 = 0{,}223$. [1,5 pt]

6. $P(Y \geq 37) = P(Y = 37) + P(Y \geq 38) \approx 0{,}211 + 0{,}223 \approx 0{,}434$ (calculatrice directe : $P(Y \leq 36) \approx 0{,}566$ d'où $P(Y \geq 37) \approx 0{,}434$). [1,5 pt]

Partie C.

7. $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$, $P_A(C) = 0{,}914$, $P_B(C) = 0{,}879$. [0,5 pt]

8. $P(C \cap A) = 0{,}6 \times 0{,}914 = 0{,}5484$; $P(C \cap B) = 0{,}4 \times 0{,}879 = 0{,}3516$. [1 pt]
9. $P(C) = 0{,}5484 + 0{,}3516 = 0{,}900$. [1 pt]
10. $P_C(B) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}3516}{0{,}900} \approx 0{,}391$. [1 pt]

Exercice 1 — dsb1exo2 (Exercice 2 — Loi uniforme et binomiale 8 points) [Correction]

Dans une entreprise de béton prêt à l'emploi, le délai D (en minutes) entre la commande et la livraison sur site est modélisé par une loi uniforme sur $[15\,;\,60]$.

Partie A.

1. Donner la densité f de D. La représenter sur un graphique propre.
2. Calculer $E(D)$ et $V(D)$.
3. Calculer $P(D \leq 30)$, $P(30 \leq D \leq 45)$, $P(D \geq 50)$.
4. Sachant que le délai est supérieur à 30 minutes, quelle est la probabilité qu'il soit supérieur à 45 minutes ?

Partie B. L'entreprise considère qu'une livraison est « à risque » si $D \geq 45$. Sur une semaine, 35 livraisons sont effectuées indépendamment. Soit N le nombre de livraisons à risque.

5. Donner la loi de N, son espérance et son écart-type.
6. Calculer $P(N \leq 8)$ à 10^{-3} près.
7. Calculer la probabilité qu'il y ait *au moins* 15 livraisons à risque sur la semaine.

Correction 1 — dsb1exo2 (Exercice 2 — corrigé) [Énoncé]

Partie A.

1. $f(t) = \dfrac{1}{45}$ sur $[15\,;\,60]$, 0 ailleurs (palier rectangulaire). [0,5 pt]
2. $E(D) = \dfrac{15+60}{2} = 37{,}5$ min ; $V(D) = \dfrac{(60-15)^2}{12} = \dfrac{2025}{12} = 168{,}75$. [1 pt]
3. $P(D \leq 30) = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3} \approx 0{,}333$; $P(30 \leq D \leq 45) = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3}$; $P(D \geq 50) = \dfrac{10}{45} = \dfrac{2}{9} \approx 0{,}222$. [1,5 pt]
4. $P_{D\geq 30}(D \geq 45) = \dfrac{P(D \geq 45)}{P(D \geq 30)} = \dfrac{15/45}{30/45} = \dfrac{1}{2}$. [1 pt]

Partie B.

5. $p = P(D \geq 45) = 1/3$, $n = 35$: $N \sim \mathscr{B}(35\,;\,1/3)$; $E(N) = 35/3 \approx 11{,}667$; $V(N) = 35 \times 2/9 \approx 7{,}778$; $\sigma(N) \approx 2{,}789$. [1,5 pt]
6. Calculatrice : $P(N \leq 8) \approx 0{,}160$. [1,5 pt]
7. $P(N \geq 15) = 1 - P(N \leq 14) \approx 1 - 0{,}862 = 0{,}138$. [1 pt]