Chapitre 1 — Probabilités conditionnelles et loi binomiale

BTS MEC2 — 2e année • Version professeur

Table des matières

Activités 2
Vocabulaire et probabilités — rappels 2
Probabilités conditionnelles 3
Indépendance de deux événements 4
Schéma de Bernoulli, loi binomiale 5
Introduction aux lois à densité — loi uniforme 6
Bilan — tableau récapitulatif 7
Exercice de synthèse 8
Carte mentale 9

PROGRAMME BO — BTS ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

Tout le cours

Contenus : Vocabulaire : expérience aléatoire, univers, événement, probabilité. Probabilités conditionnelles, arbres pondérés, tableaux à double entrée. Formule des probabilités totales. Indépendance de deux événements. Schéma de Bernoulli et loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$: paramètres, espérance np, variance $np(1-p)$. Introduction aux lois à densité : fonction de densité, loi uniforme $\mathscr{U}([a, b])$.

Démonstrations : Exigibles : formule des probabilités totales ; $E(X) = np$ pour $\mathscr{B}(n, p)$ (admise) ; $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une loi à densité.

Capacités : Utiliser un arbre pondéré ou un tableau à double entrée. Reconnaître une situation d'indépendance. Identifier un schéma de Bernoulli et calculer $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(X \geq k)$ pour une loi binomiale (calculatrice). Interpréter $E(X)$ et $V(X)$. Calculer une probabilité via une densité ; mobiliser la loi uniforme.

Activités

Sur un chantier de préfabrication, deux équipes A et B produisent des panneaux en béton. L'équipe A produit 60 % des panneaux, l'équipe B les 40 % restants. La probabilité qu'un panneau produit par A soit non conforme est 0,05 ; pour B, elle est 0,08.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité qu'un panneau prélevé au hasard dans la production soit non conforme ?
3. Un panneau est non conforme. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'équipe A ?

Correction. 1. Arbre : A (0,6) — $\bar{N}$ (0,95), N (0,05) ; B (0,4) — $\bar{N}$ (0,92), N (0,08).
2. Probabilités totales : $P(N) = 0{,}6 \times 0{,}05 + 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}030 + 0{,}032 = 0{,}062$.
3. Formule de Bayes : $P_N(A) = \dfrac{P(A \cap N)}{P(N)} = \dfrac{0{,}030}{0{,}062} \approx 0{,}484$.

Une entreprise de gros œuvre a livré 15 chantiers identiques au cours de l'année. L'expérience montre que la probabilité qu'un chantier respecte le délai contractuel est 0,8 (les chantiers sont supposés indépendants les uns des autres). On note X le nombre de chantiers livrés dans les délais parmi les 15.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en donner les paramètres.
2. Calculer $P(X = 15)$, $P(X \geq 13)$ puis $E(X)$.

Correction. 1. Schéma de Bernoulli : 15 épreuves identiques et indépendantes, de probabilité de succès $p = 0{,}8$. Donc $X \sim \mathscr{B}(15\,;\,0{,}8)$.
2. $P(X = 15) = 0{,}8^{15} \approx 0{,}0352$. $P(X \geq 13) = \sum_{k=13}^{15} \binom{15}{k} 0{,}8^k 0{,}2^{15-k} \approx 0{,}3980$. $E(X) = 15 \times 0{,}8 = 12$ chantiers.

Un fournisseur livre du béton prêt à l'emploi. Le délai D (en jours) est modélisé par une loi uniforme sur $[2\,;\,5]$.

1. Représenter la densité de D.
2. Calculer $P(D \leq 3)$, $P(D \geq 4)$, $P(2{,}5 \leq D \leq 4{,}5)$.
3. Calculer $E(D)$. Quelle interprétation ?

Correction. 1. Densité constante $f(t) = \frac{1}{3}$ sur $[2\,;\,5]$, nulle ailleurs (aire totale = 1).
2. $P(D \leq 3) = \frac{1}{3}$; $P(D \geq 4) = \frac{1}{3}$; $P(2{,}5 \leq D \leq 4{,}5) = \frac{2}{3}$.
3. $E(D) = \frac{2+5}{2} = 3{,}5$ jours. En moyenne, sur un grand nombre de livraisons, le délai observé tend vers 3,5 jours.

1 Vocabulaire et probabilités — rappels

Vocabulaire

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, sans pouvoir prédire lequel se produira. L'ensemble Ω de ces résultats est l'**univers**. Un **événement** est une partie de Ω.
Une **probabilité** sur Ω est une application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,;1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour tous événements A et B incompatibles ($A \cap B = \varnothing$), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Formules de base

Pour tous événements A et B :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)\,; \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dans le cas d'**équiprobabilité** (univers fini Ω de N issues, toutes de même probabilité) :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Dans un lot de 200 éléments préfabriqués, 18 présentent un défaut de finition, 7 un défaut d'alignement, et 3 présentent *les deux* défauts. On prprofesseur un élément au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'il présente au moins un défaut.
2. Calculer la probabilité qu'il ne présente aucun défaut.

Correction. F : défaut de finition ; A : défaut d'alignement. $P(F) = \frac{18}{200}$, $P(A) = \frac{7}{200}$, $P(F \cap A) = \frac{3}{200}$.
$P(F \cup A) = \frac{18+7-3}{200} = \frac{22}{200} = 0{,}11$.
$P(\overline{F \cup A}) = 1 - 0{,}11 = 0{,}89$.

2 Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle

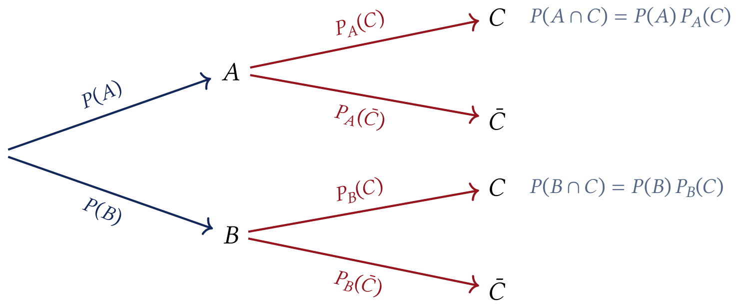
Soient A et B deux événements tels que $P(A) > 0$. La **probabilité de B sachant A** est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{ou, de façon équivalente,} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

On note aussi $P(B \mid A)$ pour $P_A(B)$.

Arbre pondéré

Dans un **arbre pondéré**, chaque branche est affectée d'une probabilité. La probabilité d'un chemin complet est le *produit* des probabilités des branches qui le composent. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.



Formule des probabilités totales

Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un **système complet d'événements** (les A_i sont deux à deux incompatibles et leur réunion est Ω), avec $P(A_i) > 0$ pour tout i. Alors pour tout événement C :

$$P(C) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap C) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(C).$$

Soit C un événement et $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet. Alors

$$C = C \cap \Omega = C \cap \big(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\big) = (C \cap A_1) \cup (C \cap A_2) \cup \dots \cup (C \cap A_n).$$

Les événements $C \cap A_i$ sont deux à deux incompatibles (car les A_i le sont). Par additivité d'une probabilité pour des événements incompatibles :

$$P(C) = \sum_{i=1}^{n} P(C \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(C). \qquad \square$$

$P(N)$ étant connu via la formule des probabilités totales, on en déduit la probabilité *a posteriori* (formule dite de *Bayes*) :

$$P_N(A) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A)\, P_A(N)}{\sum_i P(A_i)\, P_{A_i}(N)}.$$

Application. Dans l'activité 1 : $P_N(A) = \dfrac{0{,}030}{0{,}062} \approx 0{,}484$. Autrement dit : si un panneau est non conforme, il y a 48,4 % de chances qu'il provienne de l'équipe A (moins que 60 % : le défaut oriente vers B, dont le taux de non-conformité est plus élevé).

Le tableau à double entrée est équivalent à l'arbre. Sur l'activité 1, avec 1000 panneaux (nombres fictifs à but pédagogique) :

	Conforme	Non conforme	Total
A	570	30	600
B	368	32	400
Total	938	62	1000

On retrouve $P(N) = 62/1000 = 0{,}062$ et $P_N(A) = 30/62 \approx 0{,}484$.

3 Indépendance de deux événements

Indépendance

Deux événements A et B (de probabilités non nulles) sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

De façon équivalente : $P_A(B) = P(B)$ (ou $P_B(A) = P(A)$) : savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

Incompatibles ($A \cap B = \varnothing$) n'est pas **indépendants**. Si A et B sont incompatibles et de probabilités non nulles, ils sont *dépendants* : la réalisation de A interdit celle de B.

Deux machines M_1 et M_2 fonctionnent indépendamment. La probabilité qu'une pièce produite par M_1 soit conforme est 0,92 ; pour M_2, 0,95. On prprofesseur au hasard une pièce de chacune des deux machines.

1. Quelle est la probabilité que les deux pièces soient conformes ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement une des deux soit conforme ?

Correction. Notons C_1 et C_2 « pièce conforme ». Par indépendance :
1. $P(C_1 \cap C_2) = 0{,}92 \times 0{,}95 = 0{,}874$.
2. $P((C_1 \cap \bar{C}_2) \cup (\bar{C}_1 \cap C_2)) = 0{,}92 \times 0{,}05 + 0{,}08 \times 0{,}95 = 0{,}046 + 0{,}076 = 0{,}122$.

4 Schéma de Bernoulli, loi binomiale

Épreuve et loi de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à *deux issues* : *succès* (probabilité p) et *échec* (probabilité $1 - p$). La variable aléatoire X qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p, notée $\mathscr{B}(p)$. On a

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p, \quad E(X) = p, \quad V(X) = p(1 - p).$$

Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres (n, p) est la répétition de n *épreuves de Bernoulli* :
— identiques (la probabilité p de succès est la même à chaque épreuve) ;
— indépendantes (le résultat d'une épreuve n'influe pas sur les autres).

Loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres (n, p), la variable aléatoire X qui compte le **nombre de succès** suit la **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. On a, pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \qquad E(X) = np, \qquad V(X) = np(1 - p).$$

Quatre conditions à vérifier : *(i)* il y a un nombre *fixé* n d'épreuves ; *(ii)* chaque épreuve n'a que deux issues (succès / échec) ; *(iii)* la probabilité p de succès est *identique* à chaque épreuve ; *(iv)* les épreuves sont *indépendantes* (tirages avec remise ou populations très grandes devant n). Si l'une de ces conditions manque, X ne suit pas de loi binomiale.

Dans un stock important, 90 % des pièces sont conformes. On prprofesseur 10 pièces au hasard (le stock est assez grand pour assimiler ce prprofesseurment à un tirage avec remise). X désigne le nombre de pièces conformes.

1. Justifier que $X \sim \mathscr{B}(10\,;\,0{,}9)$.
2. Calculer $P(X = 10)$, $P(X \geq 8)$, $E(X)$.

Correction. 1. Tirage avec remise ⇒ épreuves indépendantes de même probabilité de succès $p = 0{,}9$, $n = 10$: $X \sim \mathscr{B}(10\,;\,0{,}9)$.
2. $P(X = 10) = 0{,}9^{10} \approx 0{,}349$.
$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{8}0{,}9^8 0{,}1^2 + 10 \times 0{,}9^9 \times 0{,}1 + 0{,}9^{10} \approx 0{,}1937 + 0{,}3874 + 0{,}3487 \approx 0{,}9298$.
$E(X) = 10 \times 0{,}9 = 9$ pièces conformes en moyenne.

Calcul à la calculatrice

- **TI** (83/84) : `2nde` → `distrib` → `binomFdp(n,p,k)` pour $P(X = k)$; `binomFRép(n,p,k)` pour $P(X \leq k)$.
- **Casio** (Graph 35+) : `STAT` → `DIST` → `BINM` → `Bpd` pour $P(X = k)$, `Bcd` pour $P(X \leq k)$.
- **Numworks** : application `Probabilités` → `Binomiale` → remplir n, p puis bornes.

Pour une probabilité du type $P(X \geq k)$, utiliser $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$.

Sur un chantier, chaque ouvrier achève sa tâche dans les délais avec probabilité 0,85, indépendamment des autres. Le chantier mobilise $n = 20$ ouvriers. Soit X le nombre d'ouvriers respectant le délai.

1. Loi de X ? $E(X)$ et $V(X)$?
2. Probabilité qu'au moins 18 ouvriers respectent le délai ?

Correction. 1. $X \sim \mathscr{B}(20\,;\,0{,}85)$; $E(X) = 20 \times 0{,}85 = 17$ ouvriers ; $V(X) = 20 \times 0{,}85 \times 0{,}15 = 2{,}55$ (écart-type $\sigma \approx 1{,}60$).
2. $P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17)$. À la calculatrice : $P(X \leq 17) \approx 0{,}5951$, donc $P(X \geq 18) \approx 0{,}4049$.

On écrit $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, où chaque X_i est une variable de Bernoulli de paramètre p (indicatrice du i-ème succès). Chaque X_i a pour espérance p. Par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = n\,p.$$

Les X_i étant *indépendantes*, on obtient de même pour la variance $V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n\,p(1-p)$. □

5 Introduction aux lois à densité — loi uniforme

Variable aléatoire à densité

Une variable aléatoire X **à densité** est caractérisée par une fonction f, appelée **densité de probabilité**, vérifiant :

1. $f(t) \geq 0$ pour tout t ;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (aire totale égale à 1) ;
3. pour tous réels $a \leq b$: $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (probabilité = aire sous la courbe).

Conséquence importante : $P(X = a) = 0$ pour tout a (aire d'un segment). Ainsi $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$, etc.

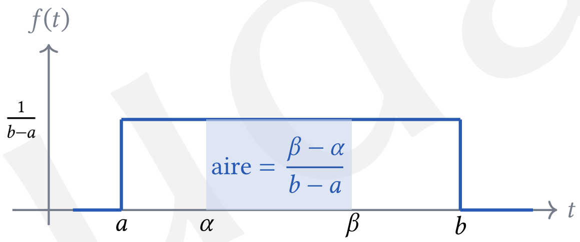
Loi uniforme $\mathscr{U}([a\,;\,b])$

La **loi uniforme** sur $[a, b]$ (avec $a < b$) est la loi de densité constante

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $\alpha, \beta \in [a, b]$ avec $\alpha \leq \beta$:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}, \qquad E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$



Par définition, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$ □

Un camion de livraison arrive sur le chantier à un instant modélisé par une loi uniforme sur $[8\,;\,10]$ (heures du matin). Un ouvrier arrive à 9 h pile.

1. Quelle est la probabilité que le camion soit *déjà arrivé* ?
2. Quelle est l'attente moyenne du camion (si l'on pose $t = 0$ à 8 h) ?

Correction. 1. $T \sim \mathscr{U}([8, 10])$, $P(T \leq 9) = \frac{9-8}{10-8} = \frac{1}{2}$.
2. $E(T) = 9$ h : le camion arrive en moyenne à 9 h.

6 Bilan — tableau récapitulatif

Situation	Formule clé	Exemple type
Union d'événements	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Deux défauts possibles
Conditionnelle	$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$	Arbre pondéré
Probabilités totales	$P(C) = \sum_i P(A_i)P_{A_i}(C)$	Deux équipes / une pièce
Indépendance	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$	Deux machines distinctes
Bernoulli $\mathscr{B}(p)$	$E = p, V = p(1-p)$	1 épreuve binaire
Binomiale $\mathscr{B}(n,p)$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	n tirages avec remise
	$E(X) = np, V(X) = np(1-p)$	Calculatrice pour $P(X \leq k)$
Loi uniforme $\mathscr{U}([a,b])$	$f(t) = \frac{1}{b-a}$ sur $[a,b]$	Délai, instant d'arrivée
	$E(X) = \frac{a+b}{2}, V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$	P = aire sous la densité

7 Exercice de synthèse

Dans une usine, 70 % des panneaux sont produits par la ligne L_1 et 30 % par la ligne L_2. La probabilité qu'un panneau issu de L_1 soit conforme est 0,96 ; celle d'un panneau issu de L_2 est 0,88. On prprofesseur un panneau au hasard dans la production.

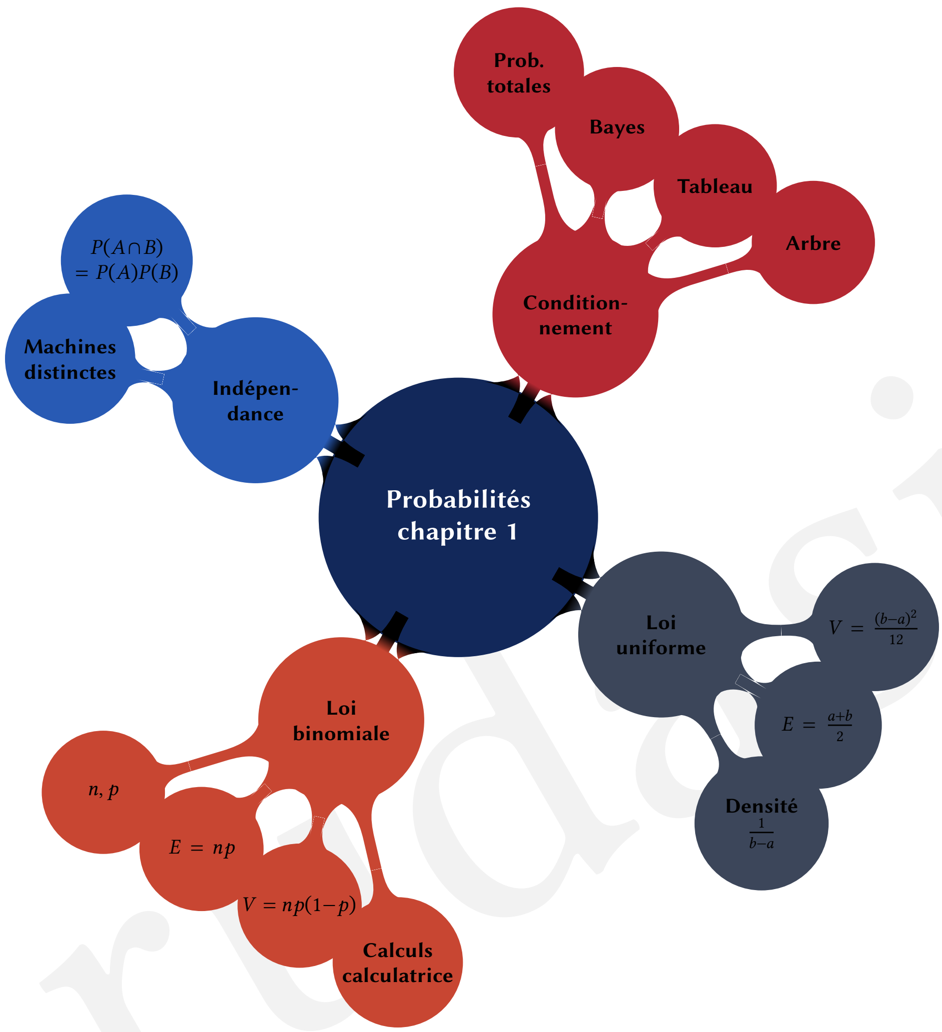
1. Calculer la probabilité que le panneau soit conforme.
2. Un panneau est conforme. Quelle est la probabilité qu'il provienne de L_2 ?
3. On prprofesseur à présent $n = 12$ panneaux au hasard dans la production totale (grand stock, tirages assimilés avec remise). On note Y le nombre de panneaux conformes parmi les 12. Déterminer la loi de Y, $E(Y)$ et calculer $P(Y \geq 11)$.

Correction. 1. $P(C) = 0{,}7 \times 0{,}96 + 0{,}3 \times 0{,}88 = 0{,}672 + 0{,}264 = 0{,}936$.

2. $P_C(L_2) = \dfrac{P(L_2 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}264}{0{,}936} \approx 0{,}2821$.

3. $Y \sim \mathscr{B}(12\,;\,0{,}936)$ (schéma de Bernoulli : 12 épreuves indépendantes, $p = 0{,}936$).
$E(Y) = 12 \times 0{,}936 = 11{,}232$ panneaux.
$P(Y \geq 11) = P(Y = 11) + P(Y = 12) = \binom{12}{11} 0{,}936^{11} \times 0{,}064 + 0{,}936^{12} \approx 12 \times 0{,}4845 \times 0{,}064 + 0{,}4533 \approx 0{,}3721 + 0{,}4533 \approx 0{,}8254$.

Carte mentale — vue d'ensemble



Version professeur — Chapitre 1 — BTS MEC2 — • le brouillon, c'est la pensée qui se déplie.