# Chapitre 1 — Probabilités conditionnelles et loi binomiale

BTS MEC2 — 2$^{\text{e}}$ année • Version élève

## Table des matières



PROGRAMME BO — BTS ÉCONOMIE DE LA CONSTRUCTION

**Contenus :** Vocabulaire : expérience aléatoire, univers, événement, probabilité. Probabilités conditionnelles, arbres pondérés, tableaux à double entrée. Formule des probabilités totales. Indépendance de deux événements. Schéma de Bernoulli et loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ : paramètres, espérance $np$, variance $np(1-p)$. Introduction aux lois à densité : fonction de densité, loi uniforme $\mathscr{U}([a, b])$.

**Démonstrations :** Exigibles : formule des probabilités totales ; $E(X) = np$ pour $\mathscr{B}(n, p)$ (admise) ; $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour une loi à densité.

**Capacités :** Utiliser un arbre pondéré ou un tableau à double entrée. Reconnaître une situation d'indépendance. Identifier un schéma de Bernoulli et calculer $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(X \geq k)$ pour une loi binomiale (calculatrice). Interpréter $E(X)$ et $V(X)$. Calculer une probabilité via une densité ; mobiliser la loi uniforme.

Tout le cours

## Activités

Sur un chantier de préfabrication, deux équipes $A$ et $B$ produisent des panneaux en béton. L'équipe $A$ produit 60 % des panneaux, l'équipe $B$ les 40 % restants. La probabilité qu'un panneau produit par $A$ soit non conforme est 0,05 ; pour $B$, elle est 0,08.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité qu'un panneau prélevé au hasard dans la production soit non conforme ?
3. Un panneau est non conforme. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'équipe $A$ ?

Une entreprise de gros œuvre a livré 15 chantiers identiques au cours de l'année. L'expérience montre que la probabilité qu'un chantier respecte le délai contractuel est 0,8 (les chantiers sont supposés indépendants les uns des autres). On note $X$ le nombre de chantiers livrés dans les délais parmi les 15.

1. Justifier que $X$ suit une loi binomiale et en donner les paramètres.
2. Calculer $P(X = 15)$, $P(X \geq 13)$ puis $E(X)$.

Un fournisseur livre du béton prêt à l'emploi. Le délai $D$ (en jours) est modélisé par une loi uniforme sur $[2\,;\,5]$.

1. Représenter la densité de $D$.
2. Calculer $P(D \leq 3)$, $P(D \geq 4)$, $P(2{,}5 \leq D \leq 4{,}5)$.
3. Calculer $E(D)$. Quelle interprétation ?

## 1 Vocabulaire et probabilités — rappels

**Vocabulaire**

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît tous les résultats possibles, sans pouvoir prédire lequel se produira. L'ensemble $\Omega$ de ces résultats est l'**univers**. Un **événement** est une partie de $\Omega$.
Une **probabilité** sur $\Omega$ est une application $P : \mathscr{P}(\Omega) \to [0\,;\,1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour tous événements $A$ et $B$ incompatibles ($A \cap B = \varnothing$), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

**Formules de base**

Pour tous événements $A$ et $B$ :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)\,; \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Dans le cas d'**équiprobabilité** (univers fini $\Omega$ de $N$ issues, toutes de même probabilité) :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre d'issues possibles}} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

Dans un lot de 200 éléments préfabriqués, 18 présentent un défaut de finition, 7 un défaut d'alignement, et 3 présentent *les deux* défauts. On prélève un élément au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'il présente au moins un défaut.
2. Calculer la probabilité qu'il ne présente aucun défaut.

## 2 Probabilités conditionnelles

### Probabilité conditionnelle

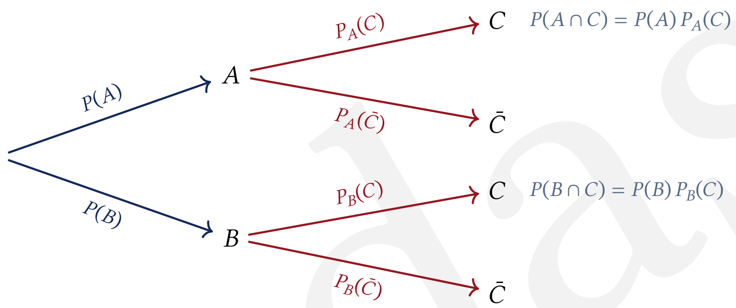
Soient $A$ et $B$ deux événements tels que $P(A) > 0$. La **probabilité de $B$ sachant $A$** est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{ou, de façon équivalente,} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

On note aussi $P(B \mid A)$ pour $P_A(B)$.

### Arbre pondéré

Dans un **arbre pondéré**, chaque branche est affectée d'une probabilité. La probabilité d'un chemin complet est le *produit* des probabilités des branches qui le composent. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1.




### Formule des probabilités totales

Soit $\{A_1, \dots, A_n\}$ un **système complet d'événements** (les $A_i$ sont deux à deux incompatibles et leur réunion est $\Omega$), avec $P(A_i) > 0$ pour tout $i$. Alors pour tout événement $C$ :

$$P(C) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap C) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(C).$$

Soit $C$ un événement et $\{A_1, \dots, A_n\}$ un système complet. Alors

$$C = C \cap \Omega = C \cap \left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = (C \cap A_1) \cup (C \cap A_2) \cup \cdots \cup (C \cap A_n).$$

Les événements $C \cap A_i$ sont deux à deux incompatibles (car les $A_i$ le sont). Par additivité d'une probabilité pour des événements incompatibles :

$$P(C) = \sum_{i=1}^{n} P(C \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\, P_{A_i}(C). \qquad \square$$

$P(N)$ étant connu via la formule des probabilités totales, on en déduit la probabilité *a posteriori* (formule dite de *Bayes*) :

$$P_N(A) = \frac{P(A \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A)\,P_A(N)}{\sum_i P(A_i)\,P_{A_i}(N)}.$$

**Application.** Dans l'activité 1 : $P_N(A) = \dfrac{0{,}030}{0{,}062} \approx 0{,}484$. Autrement dit : si un panneau est non conforme, il y a 48,4 % de chances qu'il provienne de l'équipe $A$ (moins que 60 % : le défaut oriente vers $B$, dont le taux de non-conformité est plus élevé).

Le tableau à double entrée est équivalent à l'arbre. Sur l'activité 1, avec 1000 panneaux (nombres fictifs à but pédagogique) :

| | Conforme | Non conforme | Total |
|---|---|---|---|
| $A$ | 570 | 30 | 600 |
| $B$ | 368 | 32 | 400 |
| Total | 938 | 62 | 1000 |

On retrouve $P(N) = 62/1000 = 0{,}062$ et $P_N(A) = 30/62 \approx 0{,}484$.

## 3 Indépendance de deux événements

**Indépendance**

Deux événements $A$ et $B$ (de probabilités non nulles) sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

De façon équivalente : $P_A(B) = P(B)$ (ou $P_B(A) = P(A)$) : savoir que $A$ est réalisé ne change pas la probabilité de $B$.

**Incompatibles** ($A \cap B = \varnothing$) n'est pas **indépendants**. Si $A$ et $B$ sont incompatibles et de probabilités non nulles, ils sont *dépendants* : la réalisation de $A$ interdit celle de $B$.

Deux machines $M_1$ et $M_2$ fonctionnent indépendamment. La probabilité qu'une pièce produite par $M_1$ soit conforme est 0,92 ; pour $M_2$, 0,95. On prélève au hasard une pièce de chacune des deux machines.

1. Quelle est la probabilité que les deux pièces soient conformes ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement une des deux soit conforme ?

## 4 Schéma de Bernoulli, loi binomiale

### Épreuve et loi de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à *deux issues* : *succès* (probabilité $p$) et *échec* (probabilité $1-p$). La variable aléatoire $X$ qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon suit la **loi de Bernoulli** de paramètre $p$, notée $\mathscr{B}(p)$. On a

$$P(X=1)=p\,,\quad P(X=0)=1-p\,,\quad E(X)=p\,,\quad V(X)=p(1-p).$$

### Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** de paramètres $(n, p)$ est la répétition de $n$ *épreuves de Bernoulli* :
— identiques (la probabilité $p$ de succès est la même à chaque épreuve) ;
— indépendantes (le résultat d'une épreuve n'influe pas sur les autres).

### Loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres $(n, p)$, la variable aléatoire $X$ qui compte le **nombre de succès** suit la **loi binomiale** de paramètres $n$ et $p$, notée $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. On a, pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\qquad E(X)=np,\qquad V(X)=np(1-p).$$

Quatre conditions à vérifier : *(i)* il y a un nombre *fixé* $n$ d'épreuves ; *(ii)* chaque épreuve n'a que deux issues (succès / échec) ; *(iii)* la probabilité $p$ de succès est *identique* à chaque épreuve ; *(iv)* les épreuves sont *indépendantes* (tirages avec remise ou populations très grandes devant $n$). Si l'une de ces conditions manque, $X$ ne suit pas de loi binomiale.

Dans un stock important, 90 % des pièces sont conformes. On prélève 10 pièces au hasard (le stock est assez grand pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise). $X$ désigne le nombre de pièces conformes.

1. Justifier que $X \sim \mathscr{B}(10\,;\,0{,}9)$.
2. Calculer $P(X=10)$, $P(X \geq 8)$, $E(X)$.

**Calcul à la calculatrice**

- **TI** (83/84) : `2nde` → `distrib` → `binomFdp(n,p,k)` pour $P(X = k)$ ; `binomFRép(n,p,k)` pour $P(X \leq k)$.
- **Casio** (Graph 35+) : `STAT` → `DIST` → `BINM` → `Bpd` pour $P(X = k)$, `Bcd` pour $P(X \leq k)$.
- **Numworks** : application `Probabilités` → `Binomiale` → remplir $n$, $p$ puis bornes.

Pour une probabilité du type $P(X \geq k)$, utiliser $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$.

Sur un chantier, chaque ouvrier achève sa tâche dans les délais avec probabilité 0,85, indépendamment des autres. Le chantier mobilise $n = 20$ ouvriers. Soit $X$ le nombre d'ouvriers respectant le délai.

1. Loi de $X$ ? $E(X)$ et $V(X)$ ?
2. Probabilité qu'au moins 18 ouvriers respectent le délai ?

On écrit $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, où chaque $X_i$ est une variable de Bernoulli de paramètre $p$ (indicatrice du $i$-ème succès). Chaque $X_i$ a pour espérance $p$. Par linéarité de l'espérance :

$$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = n\,p.$$

Les $X_i$ étant *indépendantes*, on obtient de même pour la variance $V(X) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n\,p(1-p)$. $\square$

## 5 Introduction aux lois à densité — loi uniforme

**Variable aléatoire à densité**

Une variable aléatoire $X$ **à densité** est caractérisée par une fonction $f$, appelée **densité de probabilité**, vérifiant :

1. $f(t) \geq 0$ pour tout $t$ ;
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (aire totale égale à 1) ;
3. pour tous réels $a \leq b$ : $P(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (probabilité = aire sous la courbe).

**Conséquence importante :** $P(X = a) = 0$ pour tout $a$ (aire d'un segment). Ainsi $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$, etc.

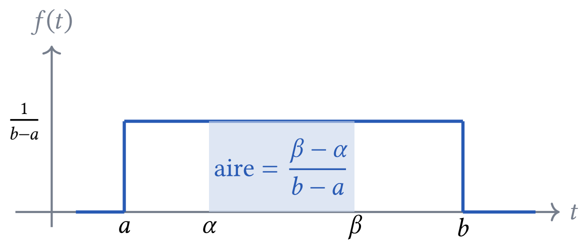
**Loi uniforme $\mathcal{U}([a\,;\,b])$**

La **loi uniforme** sur $[a, b]$ (avec $a < b$) est la loi de densité constante

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $\alpha, \beta \in [a, b]$ avec $\alpha \leq \beta$ :

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}, \qquad E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$




Par définition, $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, \mathrm{d}t = \int_a^b t \cdot \frac{1}{b-a}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$ □

Un camion de livraison arrive sur le chantier à un instant modélisé par une loi uniforme sur $[8\,;\,10]$ (heures du matin). Un ouvrier arrive à 9 h pile.

1. Quelle est la probabilité que le camion soit *déjà arrivé* ?
2. Quelle est l'attente moyenne du camion (si l'on pose $t = 0$ à 8 h) ?

## 6 Bilan — tableau récapitulatif

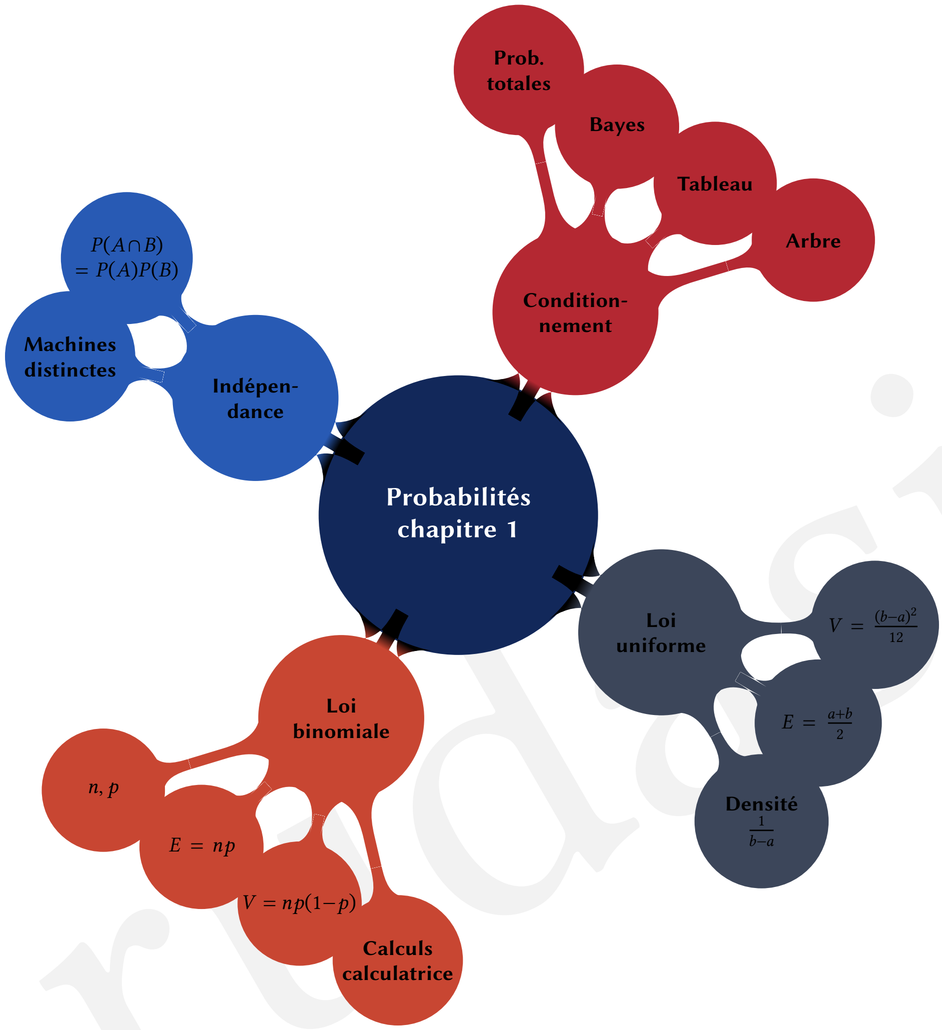
| Situation | Formule clé | Exemple type |
|---|---|---|
| Union d'événements | $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ | Deux défauts possibles |
| Conditionnelle | $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ | Arbre pondéré |
| Probabilités totales | $P(C) = \sum_i P(A_i)P_{A_i}(C)$ | Deux équipes / une pièce |
| Indépendance | $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ | Deux machines distinctes |
| Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ | $E = p, V = p(1-p)$ | 1 épreuve binaire |
| Binomiale $\mathscr{B}(n,p)$ | $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ | $n$ tirages avec remise |
| | $E(X) = np, V(X) = np(1-p)$ | Calculatrice pour $P(X \leq k)$ |
| Loi uniforme $\mathscr{U}([a,b])$ | $f(t) = \frac{1}{b-a}$ sur $[a,b]$ | Délai, instant d'arrivée |
| | $E(X) = \frac{a+b}{2}, V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ | $P$ = aire sous la densité |

## 7 Exercice de synthèse

Dans une usine, 70 % des panneaux sont produits par la ligne $L_1$ et 30 % par la ligne $L_2$. La probabilité qu'un panneau issu de $L_1$ soit conforme est 0,96 ; celle d'un panneau issu de $L_2$ est 0,88. On prélève un panneau au hasard dans la production.

1. Calculer la probabilité que le panneau soit conforme.
2. Un panneau est conforme. Quelle est la probabilité qu'il provienne de $L_2$ ?
3. On prélève à présent $n = 12$ panneaux au hasard dans la production totale (grand stock, tirages assimilés avec remise). On note $Y$ le nombre de panneaux conformes parmi les 12. Déterminer la loi de $Y$, $E(Y)$ et calculer $P(Y \geq 11)$.

## Carte mentale — vue d'ensemble




Version élève — Chapitre 1 — BTS MEC2 — • le brouillon, c'est la pensée qui se déplie.