

Planche 2 – Calcul intégral

BTS Économie de la Construction • 24 exercices • Aires, valeur moyenne, applications

Cliquer sur [Correction] pour accéder directement au corrigé.

I Aire d'une région

Exercice 1 – Aire – fonction positive [Correction]

Calculer l'aire du domaine délimité par $f(x) = 3x^2$ et l'axe des x sur $[0; 2]$.

Exercice 2 – Aire – racine carrée [Correction]

Calculer $\mathcal{A} = \int_0^4 \sqrt{x} dx$ et interpréter.

Exercice 3 – Aire – exponentielle [Correction]

Calculer l'aire sous $f(x) = 2e^x$ sur $[0; 1]$.

Exercice 4 – Aire – trapèze vérification [Correction]

Calculer $\mathcal{A} = \int_1^3 (2x + 1) dx$ et vérifier via la formule du trapèze.

Exercice 5 – Aire – fonction logarithme [Correction]

Calculer l'aire sous $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1; e^2]$.

Exercice 6 – Aire – changement de signe [Correction]

$f(x) = x^2 - 1$ sur $[-1; 2]$.

- 1.) Trouver les zéros de f .
- 2.) Vérifier le signe de f sur chaque sous-intervalle.
- 3.) Calculer l'aire totale entre les deux.

Exercice 7 – Aire – parabole et droite [Correction]

$f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 2$.

- 1.) Trouver les intersections.
- 2.) Calculer $\mathcal{A} = \int_{-1}^2 [g(x) - f(x)] dx$.

Exercice 8 – Aire – deux paraboles [Correction]

$f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = 4 - x^2$ sur $[-2; 2]$.

- 1.) Montrer que $g \geq f$ sur $[-2; 2]$.
- 2.) Calculer $\int_{-2}^2 [g(x) - f(x)] dx$.

II Valeur moyenne

Exercice 9 – Valeur moyenne – polynôme [Correction]

Calculer la valeur moyenne de $f(x) = x^2 + 2$ sur $[0; 3]$.

Exercice 10 – Valeur moyenne – exponentielle [Correction]

Calculer la valeur moyenne de $g(x) = e^x$ sur $[0; 1]$.

Exercice 11 – Valeur moyenne – affine [Correction]

$f(x) = 3x - 1$ sur $[0; 2]$.

- 1.) Calculer μ_f .
- 2.) Vérifier que $\mu_f = f\left(\frac{0+2}{2}\right)$ (valeur en milieu d'intervalle pour une fonction affine).

Exercice 12 – Valeur moyenne et rectangle [Correction]

$f(x) = \sin x$ sur $[0; \pi]$.

- 1.) Calculer μ_f .
- 2.) Interpréter : quelle est la hauteur du rectangle équivalent ?

Exercice 13 – Valeur seuil [Correction]

$f(x) = 2x + 1$ sur $[0; k]$, $k > 0$. On veut $\int_0^k f(x) dx = 15$.
Trouver k .

III Applications BTS

Exercice 14 – Section de poutre – polynôme [Correction]

Section délimitée par $f(x) = 9 - x^2$ et l'axe des x (unité : 5 cm).

- 1.) Zéros de f .

- 2.) Calculer $\mathcal{A} = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx$.
- 3.) Exprimer en cm^2 .

Exercice 15 – Déblai – droite et parabole [Correction]

Terrain $f(x) = x^2/2$, projet $g(x) = 2$.

- 1.) Trouver les intersections.
- 2.) Calculer l'aire de déblai.
- 3.) Volume pour 100 m de longueur.

Exercice 16 – Flux thermique [Correction]

$\phi(t) = 100e^{-2t}$ (W/m^2), $t \in [0; 3]$.

- 1.) Vérifier que $F(t) = -50e^{-2t}$ est une primitive.
- 2.) Calculer $E = \int_0^3 \phi(t) dt$.
- 3.) Flux moyen sur $[0; 3]$.

Exercice 17 – Charge répartie sur poutre [Correction]

La charge répartie est $q(x) = 2x + 5$ (kN/m), $x \in [0; 4]$
(position le long de la poutre).

- 1.) Calculer la charge totale $Q = \int_0^4 q(x) dx$.
- 2.) Calculer la charge moyenne μ_q .
- 3.) À quelle position x^* la charge est-elle égale à μ_q ?

Exercice 18 – Profil parabolique – maison [Correction]

Façade parabolique : $f(x) = -x^2 + 6x$ sur $[0; 6]$.

- 1.) Vérifier $f \geq 0$ sur $[0; 6]$.
- 2.) Calculer l'aire de la façade.
- 3.) Hauteur maximale (en $x = 3$).

IV Problèmes – Niveau synthèse

Exercice 19 – Section entre deux fonctions [Correction]

$f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = 2$.

- 1.) Intersections.
- 2.) Montrer que $g \geq f$ sur l'intervalle.
- 3.) Calculer $\mathcal{A} = \int_{x_1}^{x_2} [g - f] dx$.

Exercice 20 – Profil et valeur moyenne [Correction]

Profil : $q(x) = 3 - \frac{x^2}{3}$ sur $[-3; 3]$.

- 1.) Zéros de q .
- 2.) Aire sous q .
- 3.) Valeur moyenne de q .

Exercice 21 – Toiture en ogive [Correction]

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ sur $[-2; 2]$ (demi-cercle de rayon 2).

- 1.) À partir de la formule de l'aire d'un disque, donner la valeur exacte de $\int_{-2}^2 f dx$.

- 2.) Calculer la valeur moyenne de f .

Exercice 22 – Bilan – Énergie et isolation [Correction]

Une paroi absorbe un flux $\phi(t) = 50 + 30 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ W/m^2
sur $t \in [0; 12]$ h.

- 1.) Calculer $E = \int_0^{12} \phi(t) dt$.
- 2.) Flux moyen sur la journée.

Exercice 23 – Primitive inconnue – Chasles [Correction]

f est une fonction continue. On sait que $f'(x) = x^2 - 1$
et $f(0) = 2$.

- 1.) Trouver $f(x)$ explicitement.
- 2.) Calculer $\int_0^3 f(x) dx$.

Exercice 24 – Synthèse – Dalle de béton [Correction]

La section d'une dalle de béton est délimitée par $f(x) = \frac{x^2}{8}$ (intrados) et $g(x) = \frac{x^2}{8} + 0,2$ (extrados, épaisseur 20 cm).

- 1.) Montrer que $g - f = 0,2$ (épaisseur constante).
- 2.) Calculer $\int_{-4}^4 [g(x) - f(x)] dx$.
- 3.) Interpréter.
- 4.) Volume pour une longueur de 50 m.

Rappels : $\mathcal{A} = \int_a^b f$ (si $f \geq 0$) $\mathcal{A} = \int_a^b |g - f|$ (entre deux courbes) $\mu_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$ Chasles : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Corrigé – Planche 2 – Calcul intégral

BTS Économie de la Construction • 24 exercices

Correction 1 – Aire $3x^2$ [Énoncé]

$$[x^3]_0^2 = 8 \text{ u.a.}$$

Correction 2 – Aire \sqrt{x} [Énoncé]

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}. \mathcal{A} = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^4 = \frac{2}{3} \times 8 = \frac{16}{3} \approx 5,33 \text{ u.a.}$$

Correction 3 – Aire $2e^x$ [Énoncé]

$$\mathcal{A} = [2e^x]_0^1 = 2e - 2 = 2(e - 1) \approx 3,44 \text{ u.a.}$$

Correction 4 – Trapèze [Énoncé]

$$\mathcal{A} = [x^2 + x]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 10.$$

$$\text{Trapèze : } \frac{(f(1) + f(3)) \times 2}{2} = \frac{(3 + 7) \times 2}{2} = 10 \text{ u.a.}$$

Correction 5 – Logarithme [Énoncé]

$$[\ln x]_1^e = 2 \ln e - 0 = 2 \text{ u.a.}$$

Correction 6 – Changement de signe [Énoncé]

Zéros : $x = \pm 1$. Sur $[-1; 1]$: $f \leq 0$. Sur $[1; 2]$: $f \geq 0$.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - x.$$

$$\mathcal{A}_1 = -\int_{-1}^1 f dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^1 = -\left[\frac{1}{3} - 1 - \left(-\frac{1}{3} + 1\right)\right] = \frac{4}{3}.$$

$$\mathcal{A}_2 = \int_1^2 f dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{7}{3} - 1 + 1 = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Total} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67 \text{ u.a.}$$

Correction 7 – Parabole et droite [Énoncé]

Intersections : $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$.
 $x_1 = -1, x_2 = 2$.

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ u.a.}$$

Correction 8 – Deux paraboles [Énoncé]

$g(x) - f(x) = 8 - 2x^2 \geq 0$ sur $[-2; 2]$ (car $8 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq 2$)
 \boxtimes .

$$\int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-2}^2 = 2\left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{64}{3} \approx 21,3 \text{ u.a.}$$

Correction 9 – Valeur moyenne – polynôme [Énoncé]

$$\int_0^3 (x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^3 = 9 + 6 = 15.$$

$$\mu_f = \frac{15}{3} = \boxed{5}.$$

Correction 10 – Valeur moyenne – e^x [Énoncé]

$$\int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

$$\mu_g = \frac{e - 1}{1} = e - 1 \approx \boxed{1,718}.$$

Correction 11 – Affine [Énoncé]

$$\int_0^2 (3x - 1) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - x\right]_0^2 = 6 - 2 = 4.$$

$$\mu_f = \frac{4}{2} = \boxed{2}.$$

$f(1) = 3 - 1 = 2 = \mu_f \boxtimes$ (valeur en milieu d'intervalle pour une fonction affine).

Correction 12 – Sinus [Énoncé]

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

$$\mu_f = \frac{2}{\pi} \approx 0,637.$$

Hauteur du rectangle équivalent de base π : $\pi \times \frac{2}{\pi} = 2 \boxtimes$.

Correction 13 – Valeur seuil [Énoncé]

$$\int_0^k (2x + 1) dx = [x^2 + x]_0^k = k^2 + k.$$

$$k^2 + k = 15 \Leftrightarrow k^2 + k - 15 = 0.$$

$$\Delta = 61, k = \frac{-1 + \sqrt{61}}{2} \approx 3,41 \text{ (} k > 0 \text{)}.$$

Correction 14 – Section de poutre [Énoncé]

Zéros : $x = \pm 3$.

$$\mathcal{A} = \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^3 = 2(27 - 9) = 36 \text{ u.a.}$$

$$1 \text{ u.a.} = (5 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2. \mathcal{A} = 36 \times 25 = \boxed{900 \text{ cm}^2}.$$

Correction 15 – Déblai [Énoncé]

$$x^2/2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^2 (2 - x^2/2) dx = \left[2x - \frac{x^3}{6}\right]_{-2}^2 = 2\left(4 - \frac{8}{6}\right) = 2 \times \frac{16}{6} = \frac{16}{3} \approx 5,33 \text{ m}^2.$$

$$V = \frac{16}{3} \times 100 \approx \boxed{533 \text{ m}^3}.$$

Correction 16 – Flux thermique [Énoncé]

Vérif. : $F'(t) = (-50) \times (-2)e^{-2t} = 100e^{-2t} = \phi(t) \boxtimes$.

$$E = [-50e^{-2t}]_0^3 = -50e^{-6} + 50 \approx 50(1 - 0,0025) \approx \boxed{49,9 \text{ J/m}^2}.$$

$$\mu_\phi = E/3 \approx 16,6 \text{ W/m}^2.$$

Correction 17 – Charge répartie [Énoncé]

$$Q = [x^2 + 5x]_0^4 = 16 + 20 = \boxed{36 \text{ kN}}.$$

$$\mu_q = 36/4 = 9 \text{ kN/m}.$$

$$q(x^*) = 9 \Leftrightarrow 2x^* + 5 = 9 \Leftrightarrow x^* = 2 \text{ m}.$$

Correction 18 – Façade parabolique [Énoncé]

$$f(0) = 0, f(6) = 0, f(x) = x(6 - x) \geq 0 \text{ sur } [0; 6] \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{A} = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_0^6 = -72 + 108 = \boxed{36 \text{ m}^2}.$$

$$\text{Hauteur max : } f(3) = -9 + 18 = 9 \text{ m}.$$

Correction 19 – Deux fonctions [Énoncé]

$$x^2 - 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

$$\text{Sur } [-2; 2] : g - f = 4 - x^2 \geq 0 \text{ car } |x| \leq 2 \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{A} = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \approx 10,67 \text{ u.a.}$$

Correction 20 – Valeur moyenne [Énoncé]

$$\text{Zéros : } x = \pm 3.$$

$$\mathcal{A} = \left[3x - \frac{x^3}{9}\right]_{-3}^3 = 2(9 - 3) = 12 \text{ u.a.}$$

$$\mu_q = 12/6 = 2.$$

Correction 21 – Demi-cercle [Énoncé]

$$\text{L'aire du demi-disque de rayon 2 est } \frac{\pi \times 4}{2} = 2\pi.$$

$$\mu_f = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57 \text{ m}.$$

Correction 22 – Énergie et isolation [Énoncé]

$$\int_0^{12} \phi dt = \left[50t + 30 \cdot \frac{12}{\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right]_0^{12} = 600 + 0 - 0 = 600.$$

$$E = 600 \text{ J/m}^2. \mu_\phi = 50 \text{ W/m}^2.$$

Correction 23 – PrIMITIVE inconnue [Énoncé]

$$f'(x) = x^2 - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{3} - x + C.$$

$$f(0) = 2 \Rightarrow C = 2.$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x + 2.$$

$$\int_0^3 f dx = \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^3 = \frac{81}{12} - \frac{9}{2} + 6 = \frac{27}{4} - \frac{9}{2} + 6 = \frac{27 - 18 + 24}{4} = \frac{33}{4}.$$

Correction 24 – Dalle de béton [Énoncé]

$$g(x) - f(x) = 0,2 \text{ pour tout } x \mathbb{R} (\text{épaisseur constante } 20 \text{ cm}).$$

$$\int_{-4}^4 0,2 dx = 0,2 \times 8 = 1,6 \text{ m}^2.$$

Interprétation : section transversale de la dalle = 1,6 m².

$$V = 1,6 \times 50 = \boxed{80 \text{ m}^3}.$$