

Planche 1 – Calcul intégral

BTS Économie de la Construction • 24 exercices • Primitives et intégrales

Cliquer sur [\[Correction\]](#) pour accéder directement au corrigé.

I Primitives usuelles

Exercice 1 – Vérifier – polynôme [\[Correction\]](#)

Montrer que $F(x) = \frac{x^4}{4} - 3x^2 + x$ est une primitive de $f(x) = x^3 - 6x + 1$ sur \mathbb{R} .

Exercice 2 – Vérifier – exponentielle [\[Correction\]](#)

Montrer que $F(x) = 2e^x - 3x$ est une primitive de $f(x) = 2e^x - 3$ sur \mathbb{R} .

Exercice 3 – Vérifier – logarithme [\[Correction\]](#)

Montrer que $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de $f(x) = \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 4 – Primitives – terme à terme [\[Correction\]](#)

Donner une primitive F de chacune des fonctions suivantes, puis vérifier :

- 1.) $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$ sur \mathbb{R}
- 2.) $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$
- 3.) $f(x) = \cos x - \sin x$ sur \mathbb{R}
- 4.) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 5 – Primitives composées – forme $u' \cdot u^n$ [\[Correction\]](#)

Donner une primitive de :

- 1.) $f(x) = 2x(x^2 - 3)^5$ sur \mathbb{R}
- 2.) $f(x) = (4x + 1)^7$ sur \mathbb{R}
- 3.) $f(x) = 3x^2(x^3 + 1)^{-2}$ sur \mathbb{R} (vérifier que $x^3 + 1 \neq 0$)

Exercice 6 – Primitives composées – forme $u' \cdot e^u$ [\[Correction\]](#)

Donner une primitive de :

- 1.) $f(x) = 3e^{3x}$ sur \mathbb{R}
- 2.) $f(x) = 2xe^{x^2}$ sur \mathbb{R}
- 3.) $f(x) = (2x + 1)e^{x^2+x}$ sur \mathbb{R}

Exercice 7 – Primitives composées – forme u'/u [\[Correction\]](#)

Donner une primitive de :

- 1.) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ sur \mathbb{R}
- 2.) $f(x) = \frac{4x - 6}{2x^2 - 6x + 5}$ sur \mathbb{R}
- 3.) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ sur $]0; \pi[$

Exercice 8 – Primitives composées – forme u'/\sqrt{u} [\[Correction\]](#)

Donner une primitive de :

- 1.) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$ sur \mathbb{R}
- 2.) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x + 1}}$ sur $] -\frac{1}{3}; +\infty[$

$$3.) f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 2}} \text{ sur } \mathbb{R}$$

II Condition initiale

Exercice 9 – Primitive avec condition $F(x_0) = y_0$ [\[Correction\]](#)

Trouver la primitive F de $f(x) = 3x^2 - 4$ vérifiant $F(1) = 0$.

Exercice 10 – Condition initiale – exponentielle [\[Correction\]](#)

Trouver G primitive de $g(x) = e^x$ vérifiant $G(0) = 2$.

Exercice 11 – Condition initiale – composée [\[Correction\]](#)

Trouver H primitive de $h(x) = 2x(x^2 + 1)^3$ vérifiant $H(0) = 1$.

III Intégrales définies

Exercice 12 – Calcul direct [\[Correction\]](#)

Calculer les intégrales suivantes :

- 1.) $\int_0^1 (3x^2 + 2x) dx$
- 2.) $\int_1^e \frac{2}{x} dx$

$$3.) \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$4.) \int_{-1}^1 e^x dx$$

Exercice 13 – Intégrale – composée [Correction]

Calculer en trouvant une primitive directe :

$$1.) \int_0^1 2xe^{x^2} dx$$

$$2.) \int_1^2 \frac{2x}{x^2 + 3} dx$$

$$3.) \int_0^1 (2x + 1)^4 dx$$

Exercice 14 – Relation de Chasles [Correction]On sait que $\int_0^4 f = 10$, $\int_0^2 f = 3$, $\int_3^4 f = 1$.

$$1.) \text{ Calculer } \int_2^4 f.$$

$$2.) \text{ Calculer } \int_2^3 f.$$

$$3.) \text{ Calculer } \int_4^0 f.$$

Exercice 15 – Linéarité [Correction]

$$\int_1^3 f = 4 \text{ et } \int_1^3 g = 2.$$

$$\text{Calculer } \int_1^3 [3f(x) - 2g(x) + 1] dx.$$

Exercice 16 – Intégrale et symétrie [Correction]

$$\text{Calculer } \int_{-2}^2 (x^3 - 2x) dx \text{ et } \int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx.$$

Que remarque-t-on? Pourquoi?

IV Intégration par parties**Exercice 17** – IPP – Niveau 1 [Correction]

$$\text{Calculer } I = \int_0^1 xe^x dx [u' = e^x, v = x].$$

Exercice 18 – IPP – Niveau 2 [Correction]

$$\text{Calculer } J = \int_1^e x \ln x dx [u' = x, v = \ln x].$$

Exercice 19 – IPP – Niveau 3 [Correction]

$$\text{Calculer } K = \int_0^{\pi} x \sin x dx [u' = \sin x, v = x].$$

V Changement de variable**Exercice 20** – Changement $x \rightarrow x + \beta$ [Correction]

Calculer par deux méthodes (directe et changement) :

$$I = \int_2^4 (x - 2)^3 dx.$$

Exercice 21 – Changement $x \rightarrow ax$ [Correction]Calculer $J = \int_0^1 e^{4x} dx$ par deux méthodes.**Exercice 22** – Changement – composée [Correction]

$$\text{Calculer } K = \int_0^{\pi/4} \sin(3x) dx.$$

Exercice 23 – Changement – forme u'/u [Correction]

$$\text{Montrer que } L = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 24 – Changement de variable – bilan [Correction]

$$\text{Calculer } M = \int_{-1}^0 (3x + 1)^5 dx.$$

Rappels : $F' = f \Rightarrow \int_a^b f = [F]_a^b = F(b) - F(a)$ $u'u^n \rightarrow \frac{u^{n+1}}{n+1}$ $u'e^u \rightarrow e^u$ $\frac{u'}{u} \rightarrow \ln|u|$ $\frac{u'}{\sqrt{u}} \rightarrow 2\sqrt{u}$ IPP : $\int u'v = [uv] - \int uv'$

Corrigé – Planche 1 – Calcul intégral

BTS Économie de la Construction • 24 exercices

Correction 1 – Polynôme [Énoncé]

$$F'(x) = x^3 - 6x + 1 = f(x) \quad (\text{termes : } (x^4/4)' = x^3, (-3x^2)' = -6x, (x)' = 1)$$

Correction 2 – Exponentielle [Énoncé]

$$F'(x) = 2e^x - 3 = f(x) \quad \square$$

Correction 3 – Logarithme [Énoncé]

$$F'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x) \quad (\text{règle du produit : } (x \ln x)' = \ln x + 1)$$

Correction 4 – Terme à terme [Énoncé]

- $F(x) = x^4 - x^2 + x$. Vérif. : $F' = 4x^3 - 2x + 1 = f$ \square
- $F(x) = e^x + \ln x$. Vérif. : $F' = e^x + 1/x = f$ \square
- $F(x) = \sin x + \cos x$. Vérif. : $F' = \cos x - \sin x = f$ \square
- $F(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x^{3/2}$. Vérif. : $F' = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = f$ \square

Correction 5 – Forme $u'u^n$ [Énoncé]

- $u = x^2 - 3, u' = 2x, F = \frac{(x^2 - 3)^6}{6}$.
- $u = 4x + 1, u' = 4, f = \frac{1}{4} \cdot 4u^7, F = \frac{(4x + 1)^8}{32}$.
- $u = x^3 + 1, u' = 3x^2, f = u'u^{-2}, F = \frac{u^{-1}}{-1} = \frac{-1}{x^3 + 1}$.

Correction 6 – Forme $u'e^u$ [Énoncé]

- $u = 3x, u' = 3, F = e^{3x}$.
- $u = x^2, u' = 2x, F = e^{x^2}$.
- $u = x^2 + x, u' = 2x + 1, F = e^{x^2+x}$.

Correction 7 – Forme u'/u [Énoncé]

- $u = x^2 + 1 > 0, F = \ln(x^2 + 1)$.
- $u = 2x^2 - 6x + 5, u' = 4x - 6, F = \ln(2x^2 - 6x + 5)$.
- $F = \ln(\sin x)$ sur $]0; \pi[$ où $\sin x > 0$.

Correction 8 – Forme u'/\sqrt{u} [Énoncé]

- $u = x^2 + 4, u' = 2x, f = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, F = \sqrt{x^2 + 4}$.
- $u = 3x + 1, u' = 3, F = 2\sqrt{3x + 1}$.
- $u = x^2 - x + 2, u' = 2x - 1, F = 2\sqrt{x^2 - x + 2}$.

Correction 9 – Condition initiale [Énoncé]

$$F(x) = x^3 - 4x + C, F(1) = 0 \Rightarrow 1 - 4 + C = 0 \Rightarrow C = 3.$$

$$F(x) = x^3 - 4x + 3 \quad \square$$

Correction 10 – Condition initiale – e^x [Énoncé]

$$G(x) = e^x + C, G(0) = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Rightarrow C = 1.$$

$$G(x) = e^x + 1 \quad \square$$

Correction 11 – Condition initiale – composée [Énoncé]

$$u = x^2 + 1, u' = 2x, f = u'u^3, H(x) = \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + C.$$

$$H(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + C = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{4}.$$

$$H(x) = \frac{(x^2 + 1)^4}{4} + \frac{3}{4} \quad \square$$

Correction 12 – Calcul direct [Énoncé]

- $[x^3 + x^2]_0^1 = 2$.
- $[2 \ln x]_1^e = 2$.

$$3. [-\cos x]_0^\pi = 1 + 1 = 2.$$

$$4. [e^x]_{-1}^1 = e - e^{-1}.$$

Correction 13 – Intégrale – composée [Énoncé]

- $F(x) = e^{x^2}, [e^{x^2}]_0^1 = e - 1$.
- $F(x) = \ln(x^2 + 3), [\ln(x^2 + 3)]_1^2 = \ln 7 - \ln 4 = \ln(7/4)$.
- $F(x) = \frac{(2x + 1)^5}{10}, \left[\frac{(2x + 1)^5}{10}\right]_0^1 = \frac{3^5 - 1}{10} = \frac{242}{10} = 24,2$.

Correction 14 – Chasles [Énoncé]

- $\int_2^4 = \int_0^4 - \int_0^2 = 10 - 3 = 7$.
- $\int_2^3 = \int_2^4 - \int_3^4 = 7 - 1 = 6$.
- $\int_4^0 = -\int_0^4 = -10$.

Correction 15 – Linéarité [Énoncé]

$$3 \int_1^3 f - 2 \int_1^3 g + \int_1^3 1 dx = 3 \times 4 - 2 \times 2 + (3 - 1) = 12 - 4 + 2 = \square 10.$$

Correction 16 – Symétrie [Énoncé]

$x^3 - 2x$ est impaire ($f(-x) = -f(x)$), donc son intégrale sur $[-2; 2]$ est $\square 0$.

$x^2 + 1$ est paire : $\int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx = 2 \int_0^2 (x^2 + 1) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = 2 \left(\frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{28}{3}$.

Correction 17 – IPP 1 [Énoncé]

$$u' = e^x, u = e^x, v = x, v' = 1.$$

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = \square 1.$$

Correction 18 – IPP 2 [Énoncé]

$$u' = x \Rightarrow u = x^2/2, v = \ln x \Rightarrow v' = 1/x.$$

$$J = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

Correction 19 – IPP 3 [Énoncé]

$$u' = \sin x \Rightarrow u = -\cos x, v = x \Rightarrow v' = 1.$$

$$K = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 = \boxed{\pi}.$$

Correction 20 – Chgt $x - 2$ [Énoncé]

$$\text{Directe : } F(x) = \frac{(x-2)^4}{4}. I = \left[\frac{(x-2)^4}{4} \right]_2^4 = \frac{16}{4} = \boxed{4}.$$

$$\text{Chgt } t = x - 2 : I = \int_0^2 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^2 = 4 \boxtimes.$$

Correction 21 – Chgt $4x$ [Énoncé]

$$\text{Directe : } F(x) = \frac{e^{4x}}{4}. J = \left[\frac{e^{4x}}{4} \right]_0^1 = \frac{e^4 - 1}{4}.$$

$$\text{Chgt } t = 4x : J = \frac{1}{4} \int_0^4 e^t dt = \frac{e^4 - 1}{4} \boxtimes.$$

Correction 22 – Sinus de $3x$ [Énoncé]

$$F(x) = \frac{-\cos(3x)}{3}.$$

$$K = \left[\frac{-\cos(3x)}{3} \right]_0^{\pi/4} = \frac{-\cos(3\pi/4)}{3} + \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}/2 + 1}{3} = \frac{\sqrt{2} + 2}{6}.$$

Correction 23 – Forme u'/u [Énoncé]

$$u = x^2 + 1, u' = 2x. f = \frac{u'}{2u}.$$

$$L = \frac{1}{2} [\ln(x^2 + 1)]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - 0) = \frac{\ln 2}{2} \boxtimes.$$

Correction 24 – Bilan – chgt [Énoncé]

$$F(x) = \frac{(3x+1)^6}{18}.$$

$$M = \left[\frac{(3x+1)^6}{18} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{18} - \frac{(-2)^6}{18} = \frac{1 - 64}{18} = -\frac{63}{18} = -\frac{7}{2}.$$